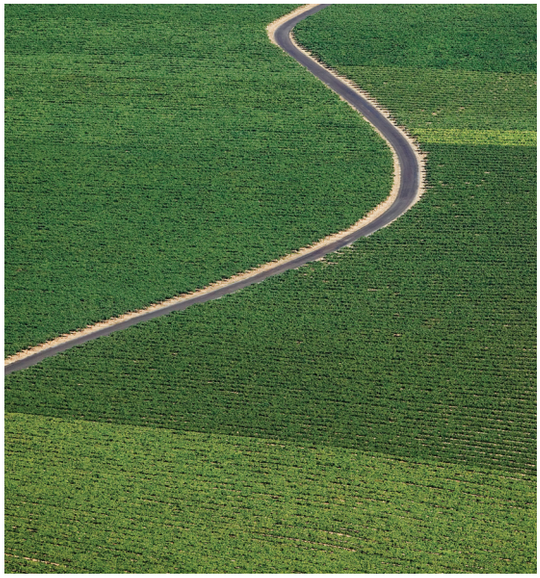


La integración resuelve un antiguo problema matemático: hallar el área de una región irregular.

5 LA INTEGRAL

El problema principal del cálculo integral es determinar el área bajo una curva. Cabe preguntarse por qué el cálculo infinitesimal se ocupa de dos aspectos aparentemente nada relacionados: las rectas tangentes y las áreas. Una razón es que ambos se calculan mediante límites. El teorema fundamental del cálculo, tratado en las secciones 5.3 y 5.4, pone de manifiesto una conexión más profunda entre ambos temas. Este teorema expresa la relación "inversa" existente entre la integración y la derivación. Desempeña además un papel fundamental en la mayor parte de las aplicaciones, tanto prácticas como teóricas, del cálculo infinitesimal.

5.1 Aproximación y cálculo de áreas

¿Qué interés puede tener determinar el área por debajo de la gráfica de una función? Consideremos un objeto que se desplaza en línea recta a *velocidad constante* y positiva v. La distancia recorrida en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es igual a $v\Delta t$, siendo $\Delta t = (t_2 - t_1)$ el tiempo total invertido. Se trata de la conocida fórmula

$$\boxed{\text{Distancia recorrida} = \overbrace{\text{velocidad} \times \text{tiempo invertido}}^{v\Delta t}} \qquad \boxed{1}$$

Como v es constante, la gráfica de la velocidad es una recta horizontal (figura 1) y $v\Delta t$ es igual al área de la región rectangular limitada por la gráfica de la función velocidad, en el intervalo $[t_1, t_2]$. De esta manera, se puede escribir la ec. (1) como

$$\boxed{\text{Distancia recorrida} = \text{área por debajo de la gráfica de la función velocidad en } [t_1, t_2]} \qquad \boxed{2}$$

Sin embargo, existe una gran diferencia entre las dos expresiones anteriores: la ec. (1) sólo tiene sentido si la velocidad es constante, mientras que la ec. (2) es cierta *incluso cuando la velocidad cambia a lo largo del tiempo* (se demostrará en la sección 5.5). Por tanto, la ventaja de expresar la distancia recorrida como un área es que permite considerar tipos de movimiento más generales.

Para ilustrar por qué la ec. (2) puede ser cierta en general, consideremos una situación en la que la velocidad varíe a lo largo del tiempo, pero sea constante sobre determinados intervalos. En otras palabras, se supone que la velocidad del objeto cambia repentinamente de un intervalo al siguiente, tal y como se ilustra en la figura 2. La distancia recorrida en cada intervalo es igual al área del rectángulo que queda por encima de ese intervalo,

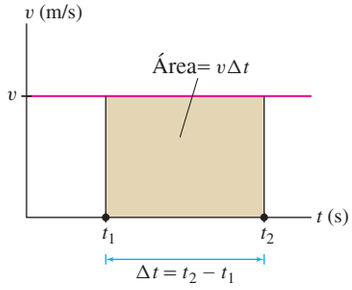


FIGURA 1 El rectángulo tiene área $v\Delta t$, que es igual a la distancia recorrida.

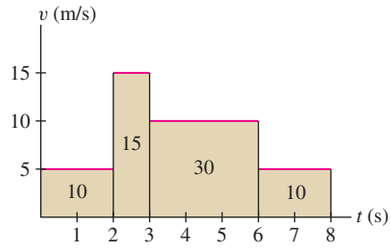


FIGURA 2 La distancia recorrida es igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos.

Page (PS/TeX): 1 / 244, COMPOSITE

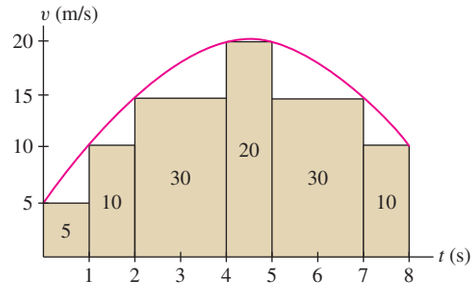


FIGURA 3 La distancia recorrida es igual al área por debajo de la curva. Se *aproxima* mediante la suma de las áreas de los rectángulos.

de manera que la distancia total recorrida es la suma de las áreas de todos los rectángulos. En la figura 2,

$$\text{Distancia recorrida en } [0, 8] = \underbrace{10 + 15 + 30 + 10}_{\text{Suma de las áreas de los rectángulos}} = 65 \text{ m}$$

Cuando la velocidad varíe de manera continua (figura 3), la estrategia será *aproximar* el área por debajo de la gráfica mediante sumas de áreas de rectángulos y realizar un paso al límite para estas sumas. Esta idea conduce al concepto de integral.

Aproximación de un área mediante rectángulos

Nuestro objetivo final es calcular el área por debajo de la gráfica de una función $f(x)$. En esta sección se supone que $f(x)$ es continua y *positiva*, de manera que su gráfica se sitúa por encima del eje x (figura 4). La primera etapa será aproximar el área usando rectángulos.

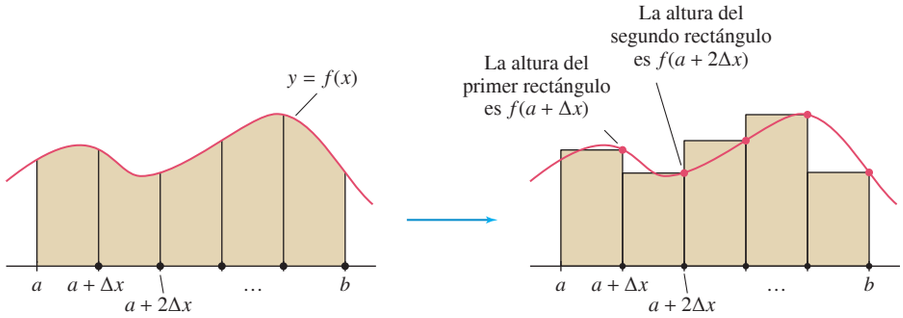
Recordemos que el procedimiento para determinar la pendiente de la recta tangente a una curva (la derivada) comprende dos etapas: en primer lugar se aproxima la pendiente mediante rectas secantes para, a continuación, calcular el límite de estas aproximaciones. En el cálculo integral, se consideran asimismo dos etapas:

- *En primer lugar, se aproxima el área por debajo de la gráfica de la función usando rectángulos.*
- *A continuación, se calcula el área exacta (la integral) como el límite de estas aproximaciones.*

Como punto de partida, se escoge un número natural N y se divide $[a, b]$ en N subintervalos de igual longitud, tal y como se muestra en la figura 4(A). El intervalo $[a, b]$ tiene longitud $b - a$, de manera que cada subintervalo tiene longitud $\Delta x = (b - a)/N$. Los extremos superiores de cada subintervalo son

$$\boxed{a + \Delta x,\ a + 2\Delta x,\ \ldots,\ a + (N - 1)\Delta x,\ a + N\Delta x}$$

Observemos que el último extremo superior es b, pues $a + N\Delta x = a + N((b - a)/N) = b$. A continuación, tal y como se ilustra en la figura 4(B), sobre cada subintervalo se construye un rectángulo cuya altura es el valor de $f(x)$ en el *extremo superior* del subintervalo.



(A) División de $[a, b]$ en N subintervalos, cada uno de longitud Δx.

(B) Construcción de rectángulos basados en el extremo superior de cada subintervalo.

FIGURA 4

La suma de las áreas de estos rectángulos da lugar a una *aproximación* del área por debajo de la gráfica. El primer rectángulo tiene base Δx y altura $f(a + \Delta x)$, de manera que su área es $f(a + \Delta x)\Delta x$. Análogamente, el segundo rectángulo tiene altura $f(a + 2\Delta x)$

y área $f(a+2\Delta x)\,\Delta x$, etc. La suma de las áreas de todos estos rectángulos se denota como R_N y se denomina la **aproximación de orden N basada en el extremo superior**:

$$R_N = f(a+\Delta x)\Delta x + f(a+2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(a+N\Delta x)\Delta x$$

Sacando factor común Δx, se obtiene que

$$\boxed{R_N = \Delta x\,(f(a+\Delta x) + f(a+2\Delta x) + \cdots + f(a+N\Delta x))}$$

Es decir: *R_N es igual a Δx multiplicado por la suma de los valores de la función en los extremos superiores de los subintervalos.*

Resumen:

a = *extremo inferior del intervalo* $[a, b]$

b = *extremo superior del intervalo* $[a, b]$

N = *número de subintervalos en* $[a, b]$

$\Delta x = \dfrac{b-a}{N}$

EJEMPLO 1 Calcule R_4 y R_6 para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[1, 3]$.

Solución

***Etapa 1.* Determine Δx y los extremos superiores**

Para calcular R_4, se divide $[1, 3]$ en cuatro subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$. Los extremos superiores son $a + j\Delta x = 1 + j(\frac{1}{2})$ para $j = 1, 2, 3, 4$. Estos valores se sitúan en intervalos de longitud $\frac{1}{2}$, que empiezan en $\frac{3}{2}$; los extremos superiores son $\frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$, tal y como se muestra en la figura 5(A).

***Etapa 2.* Calcule Δx multiplicado por la suma de los valores de la función**

R_4 es igual a Δx multiplicado por la suma de los valores de la función en los extremos superiores:

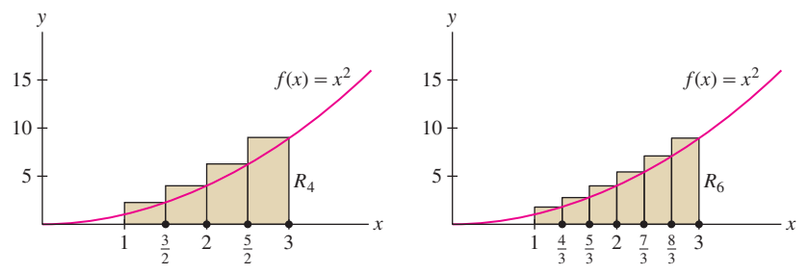
$$R_4 = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{4}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{6}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right) = \frac{43}{4} = 10{,}75$$

R_6 se obtiene de manera análoga: $\Delta x = \frac{3-1}{6} = \frac{1}{3}$ y los extremos superiores se sitúan en intervalos de longitud $\frac{1}{3}$, que empiezan en $\frac{4}{3}$ y finalizan en 3, tal y como se muestra en la figura 5(B). Por tanto,

$$R_6 = \frac{1}{3}\left(f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{6}{3}\right) + f\left(\frac{7}{3}\right) + f\left(\frac{8}{3}\right) + f\left(\frac{9}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{16}{9} + \frac{25}{9} + \frac{36}{9} + \frac{49}{9} + \frac{64}{9} + \frac{81}{9}\right) = \frac{271}{27} \approx 10{,}037$$



(A) La aproximación R_4 (B) La aproximación R_6

FIGURA 5

Notación sumatoria

La **notación sumatoria** es una notación estándar para escribir sumas de una manera compacta. La suma de los números $a_m, \ldots, a_n$ $(m \leq n)$ se denota

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Se usa la letra griega $\sum$ (sigma mayúscula) para representar la "suma," y la notación $\sum_{j=m}^{n}$ indica que el sumatorio empieza en $j = m$ y acaba en $j = n$. Por ejemplo:

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

En este sumatorio, el término j-ésimo es $a_j = j^2$. Nos referiremos a j^2 como el **término general**. La letra j se denomina **índice del sumatorio**. También se llama **variable muda**, porque cualquier otra letra puede ser utilizada en su lugar. Por ejemplo:

$$\sum_{k=4}^{6} (k^2 - 2k) = \overbrace{(4^2 - 2(4))}^{k=4} + \overbrace{(5^2 - 2(5))}^{k=5} + \overbrace{(6^2 - 2(6))}^{k=6} = 47$$

$$\sum_{m=7}^{9} 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad (\text{pues } a_7 = a_8 = a_9 = 1)$$

Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva para la suma de números reales dan lugar a las siguientes reglas para operar con sumatorios.

Linealidad de los sumatorios

- $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} (a_j + b_j) = \sum_{j=m}^{n} a_j + \sum_{j=m}^{n} b_j$
- $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} C a_j = C \sum_{j=m}^{n} a_j$ (para cualquier constante C)
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} k = nk$ (para cualquier constante k y $n \geq 1$)

Por ejemplo,

$$\sum_{j=3}^{5} (j^2 + j) = (3^2 + 3) + (4^2 + 4) + (5^2 + 5)$$

es igual a

$$\sum_{j=3}^{5} j^2 + \sum_{j=3}^{5} j = (3^2 + 4^2 + 5^2) + (3 + 4 + 5)$$

La linealidad puede ser útil para escribir un único sumatorio como suma de varios. Por ejemplo:

$$\sum_{k=0}^{100}(7k^2 - 4k + 9) = \sum_{k=0}^{100} 7k^2 + \sum_{k=0}^{100}(-4k) + \sum_{k=0}^{100} 9$$
$$= 7\sum_{k=0}^{100} k^2 - 4\sum_{k=0}^{100} k + 9\sum_{k=0}^{100} 1$$

Cuando se trabaja con aproximaciones del área, es conveniente usar la notación sumatoria. Por ejemplo, R_N es una suma de término general $f(a + j\Delta x)$:

$$R_N = \Delta x[f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \cdots + f(a + N\Delta x)]$$

El sumatorio va desde $j = 1$ hasta $j = N$ y R_N se puede escribir de forma compacta como

$$\boxed{R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x)}$$

Usaremos otras dos aproximaciones rectangulares para el área: la aproximación en base al extremo inferior y la aproximación en base al punto medio. Como antes, se divide $[a, b]$ en N subintervalos. En la **la aproximación en base al extremo inferior** L_N, las alturas de los rectángulos son los valores de $f(x)$ en los extremos inferiores [figura 6(A)]. Estos extremos inferiores son:

RECORDATORIO

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$a,\ a + \Delta x,\ a + 2\Delta x,\ \ldots,\ a + (N - 1)\Delta x$$

y la suma de las áreas de los rectángulos, basados en el extremo inferior, es:

$$L_N = \Delta x\Big(f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \cdots + f(a + (N - 1)\Delta x)\Big)$$

Cabe observar que el término general de R_N y el de L_N es, en ambos casos, $f(a + j\Delta x)$. Sin embargo, la suma para L_N va desde $j = 0$ hasta $j = N - 1$, en lugar de empezar en $j = 1$ y acabar en $j = N$:

$$\boxed{L_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f(a + j\Delta x)}$$

En la **aproximación en base al punto medio**, M_N, la altura de los rectángulos es el valor de $f(x)$ en el punto medio del subintervalo, en lugar de en los extremos. Como se observa en la figura 6(B), los puntos medios son:

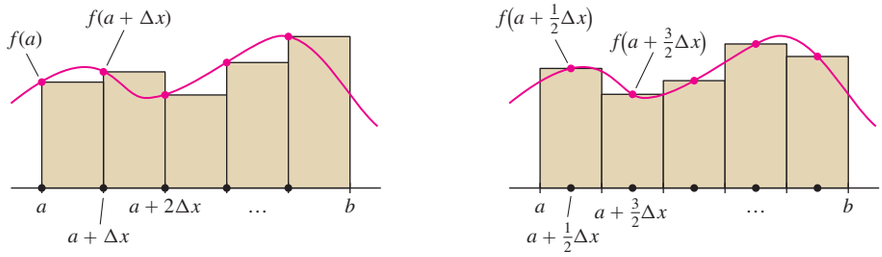
$$a + \frac{1}{2}\Delta x,\ a + \frac{3}{2}\Delta x,\ \ldots,\ a + \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta x$$

La suma de las áreas de los rectángulos basados en el punto medio es:

$$M_N = \Delta x\left(f\left(a + \frac{1}{2}\Delta x\right) + f\left(a + \frac{3}{2}\Delta x\right) + \cdots + f\left(a + \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\right)$$

En notación sumatoria,

$$\boxed{M_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)}$$



(A) Rectángulos basados en el extremo inferior. (B) Rectángulos basados en el punto medio.

FIGURA 6

EJEMPLO 2 Calcule R_6, L_6 y M_6 para $f(x) = x^{-1}$ en $[2, 4]$.

Solución En esta situación, $\Delta x = (b-a)/N = (4-2)/6 = \frac{1}{3}$. En el sumatorio de R_6 y L_6, el término general es:

$$f(a + j\Delta x) = f\left(2 + j\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{2 + \frac{1}{3}j} = \frac{3}{6+j}$$

Por consiguiente (figura 7):

$$R_6 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} f\left(2 + \left(\frac{1}{3}\right)j\right) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6}\frac{3}{6+j}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{3}{9} + \frac{3}{10} + \frac{3}{11} + \frac{3}{12}\right) \approx 0{,}653$$

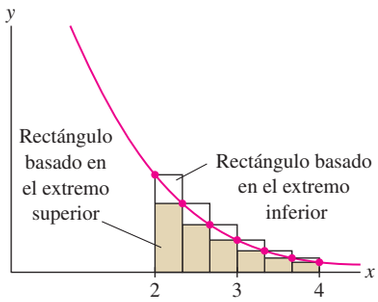


FIGURA 7 L_6 y R_6 para $f(x) = x^{-1}$ en $[2, 4]$.

En L_6, la suma empieza en $j = 0$ y acaba en $j = 5$:

$$L_6 = \frac{1}{3}\sum_{j=0}^{5}\frac{3}{6+j} = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{6} + \frac{3}{7} + \frac{3}{8} + \frac{3}{9} + \frac{3}{10} + \frac{3}{11}\right) \approx 0{,}737$$

El término general de M_6 es:

$$f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right) = f\left(2 + \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2 + \frac{j}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{6}{12 + 2j - 1}$$

Sumando desde $j = 1$ hasta 6, se obtiene (figura 8):

$$M_6 = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6} f\left(2 + \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{6}\frac{6}{12 + 2j - 1}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{6}{13} + \frac{6}{15} + \frac{6}{17} + \frac{6}{19} + \frac{6}{21} + \frac{6}{23}\right) \approx 0{,}692$$

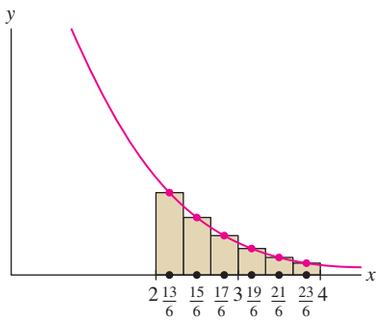


FIGURA 8 M_6 para $f(x) = x^{-1}$ en $[2, 4]$.

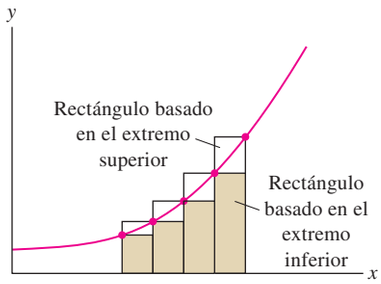


FIGURA 9 Si $f(x)$ es estrictamente creciente, los rectángulos basados en el extremo inferior se encuentran por debajo de la gráfica de f y los basados en el extremo superior por encima.

UN APUNTE GRÁFICO Funciones monótonas En la figura 7 se observa que, para $f(x) = x^{-1}$, los rectángulos en base al extremo inferior quedan por encima de la gráfica y los basados en el extremo superior se sitúan por debajo de ésta. El área exacta A debe encontrarse entre R_6 y L_6. En consecuencia, y según el ejemplo anterior, $0{,}65 \le A \le 0{,}74$. De forma más general, *si $f(x)$ es estrictamente monótona (creciente o decreciente) el área exacta se encuentra entre R_N y L_N* (figura 9):

- $f(x)$ estrictamente creciente $\Rightarrow$ $L_N \le$ área por debajo de la gráfica $\le R_N$
- $f(x)$ estrictamente decreciente $\Rightarrow$ $R_N \le$ área por debajo de la gráfica $\le L_N$

Cálculo de un área como límite de aproximaciones

En la figura 10 se muestran diferentes aproximaciones basadas en el extremo superior. Cabe destacar que el *error*, que corresponde a la región amarilla situada por encima de la gráfica, disminuye al aumentar el número de rectángulos. En realidad se observa que, *considerando un número suficientemente elevado N de rectángulos, se puede disminuir el error tanto como sea preciso.* De esta manera, tiene sentido considerar el límite cuando $N \to \infty$, pues debería proporcionar el área exacta por debajo de la curva. El siguiente teorema garantiza que tal límite existe (ver el teorema 8 en el apéndice D para una demostración y el ejercicio 85 para una caso particular).

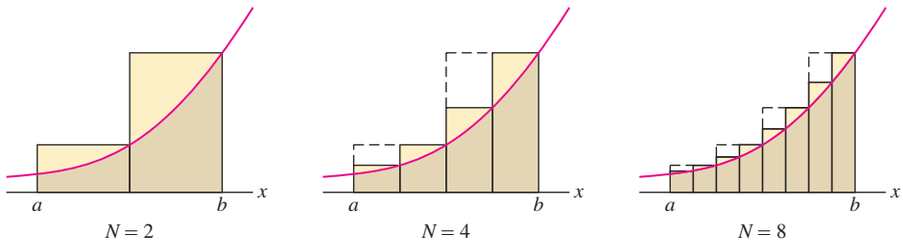


FIGURA 10 El error disminuye al considerar más rectángulos.

En el teorema 1, no se supone que $f(x) \geq 0$. Si $f(x)$ toma valores negativos, el límite L ya no representa el área por debajo de la gráfica, pero puede ser interpretado como un área "con signo", concepto que se tratará en la siguiente sección.

TEOREMA 1 Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces las aproximaciones basadas en los extremos y en el punto medio se aproximan entre ellas y tienden al mismo límite cuando $N \to \infty$. Es decir, existe un valor L tal que:

$$\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty} M_N = L$$

Si $f(x) \geq 0$, se define el área por debajo de la gráfica de $f(x)$ en $[a, b]$ como L.

UN APUNTE CONCEPTUAL En cálculo diferencial se usan los límites para definir cantidades elementales que, de otra forma, no tendrían un significado preciso. En base al teorema 1 se puede *definir* el área como un límite, más o menos de la misma manera que se define la pendiente de la recta tangente como el límite de las pendientes de las rectas secantes.

En los tres ejemplos que se encuentran a continuación, se ilustra el teorema 1 utilizando fórmulas para las **sumas de potencias**. La k-ésima suma de potencias es la suma de las potencias k-ésimas para los N primeros enteros positivos $\{1, , 2, \ldots, N\}$. Utilizaremos las fórmulas de las sumas de potencias para $k = 1, 2, 3$.

En los problemas 40-43 de la sección 1.3 se desarrolla un método para demostrar fórmulas para sumas de potencias. Las fórmulas (3)-(5) se pueden verificar también por inducción.

Sumas de potencias

$$\sum_{j=1}^{N} j = 1 + 2 + \cdots + N = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} \qquad \boxed{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \qquad \boxed{4}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4} \qquad \boxed{5}$$

Por ejemplo, según la ec. (4),

$$\sum_{j=1}^{6} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = \underbrace{\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2} + \frac{6}{6}}_{\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} \text{ para } N=6} = 91$$

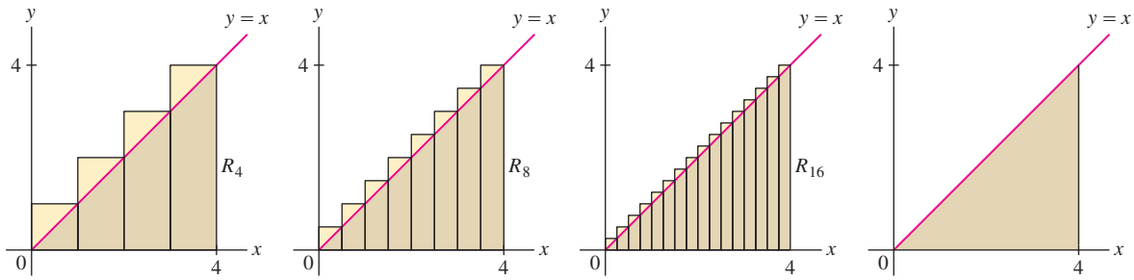


FIGURA 11 Las aproximaciones en base al extremo superior aproximan al área del triángulo.

Como primer ejemplo, calcularemos el área de un triángulo rectángulo de manera "exhaustiva".

EJEMPLO 3 Determine el área A por debajo de la gráfica de $f(x) = x$ en $[0, 4]$ de tres maneras:

(a) Aplicando geometría plana **(b)** $\lim_{N\to\infty} R_N$ **(c)** $\lim_{N\to\infty} L_N$

Solución La región por debajo de la gráfica es un triángulo rectángulo de base $b = 4$ y altura $h = 4$ (figura 11).

(a) Según las fórmulas de geometría plana para el área de un triángulo, $A = \frac{1}{2}bh = (\frac{1}{2})(4)(4) = 8$.

(b) Calculemos esta área nuevamente, pero ahora como un límite. Como $\Delta x = (b - a)/N = 4/N$ y $f(x) = x$,

$$f(a + j\Delta x) = f\left(0 + j\left(\frac{4}{N}\right)\right) = \frac{4j}{N}$$

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x) = \frac{4}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{4j}{N} = \frac{16}{N^2}\sum_{j=1}^{N} j$$

En la última igualdad, se ha sacado factor común $4/N$ de la suma. Se puede proceder de esta manera porque $4/N$ es una constante y no depende de j. Así, según la fórmula (3):

$$R_N = \frac{16}{N^2}\sum_{j=1}^{N} j = \frac{16}{N^2}\underbrace{\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)}_{\text{Fórmula para la suma de potencias}} = \frac{8}{N^2}\left(N^2 + N\right) = 8 + \frac{8}{N}$$

El segundo término $8/N$ tiende a cero cuando N tiende a ∞, de manera que

$$A = \lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty}\left(8 + \frac{8}{N}\right) = 8$$

Tal y como cabía esperar, este límite conduce al mismo valor que el de la fórmula $\frac{1}{2}bh$.

(c) La aproximación basada en el extremo inferior es análoga, pero la suma empieza en $j = 0$ y acaba en $j = N - 1$:

$$L_N = \frac{16}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{16}{N^2}\sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{16}{N^2}\left(\frac{(N-1)N}{2}\right) = 8 - \frac{8}{N} \qquad \boxed{6}$$

Cabe mencionar que, en el segundo paso, se ha reemplazado la suma que empieza en $j = 0$ por una suma que empieza en $j = 1$. Este cambio es factible porque el término para $j = 0$ es cero y puede ser omitido. Una vez más, se obtiene que $A = \lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty}(8 - 8/N) = 8$. ■

En el siguiente ejemplo se calcula el área bajo una gráfica curva. A diferencia de los ejemplos anteriores, no se puede calcular este área de forma directa, aplicando geometría plana.

RECORDATORIO

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x)$$

$$L_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f(a + j\Delta x)$$

$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

En la ec. (6), se aplica la fórmula

$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2}$$

con $N - 1$ en lugar de N:

$$\sum_{j=1}^{N-1} j = \frac{(N-1)N}{2}$$

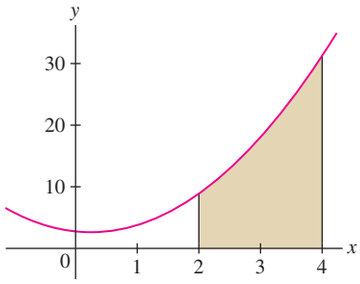


FIGURA 12 Área por debajo de la gráfica de $f(x) = 2x^2 - x + 3$ en $[2, 4]$.

EJEMPLO 4 Sea A el área por debajo de la gráfica de $f(x) = 2x^2 - x + 3$ en $[2, 4]$ (figura 12). Calcule A como el límite $\lim_{N\to\infty} R_N$.

Solución

***Etapa 1.* Exprese R_N como sumas de potencias**

En este caso, $\Delta x = (4 - 2)/N = 2/N$ y

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(2 + \frac{2j}{N}\right)$$

El término general se puede simplificar mediante manipulación algebraica. Como $f(x) = 2x^2 - x + 3$,

$$\begin{aligned} f\left(2 + \frac{2j}{N}\right) &= 2\left(2 + \frac{2j}{N}\right)^2 - \left(2 + \frac{2j}{N}\right) + 3 \\ &= 2\left(4 + \frac{8j}{N} + \frac{4j^2}{N^2}\right) - \left(2 + \frac{2j}{N}\right) + 3 = \frac{8}{N^2}j^2 + \frac{14}{N}j + 9 \end{aligned}$$

De esta manera, R_N se puede expresar como sumas de potencias:

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{8}{N^2}j^2 + \frac{14}{N}j + 9\right) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{8}{N^2}j^2 + \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{14}{N}j + \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}9 \\ &= \frac{16}{N^3}\sum_{j=1}^{N}j^2 + \frac{28}{N^2}\sum_{j=1}^{N}j + \frac{18}{N}\sum_{j=1}^{N}1 \end{aligned} \tag{7}$$

***Etapa 2.* Utilice las fórmulas para las sumas de potencias**

Aplicando las fórmulas (3) y (4), para las sumas de potencias, en la ec. (7) se obtiene:

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{16}{N^3}\left(\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}\right) + \frac{28}{N^2}\left(\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}\right) + \frac{18}{N}(N) \\ &= \left(\frac{16}{3} + \frac{8}{N} + \frac{8}{3N^2}\right) + \left(14 + \frac{14}{N}\right) + 18 \\ &= \frac{112}{3} + \frac{22}{N} + \frac{8}{3N^2} \end{aligned}$$

***Etapa 3.* Calcule el límite**

$$A = \lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{112}{3} + \frac{22}{N} + \frac{8}{3N^2}\right) = \frac{112}{3}$$

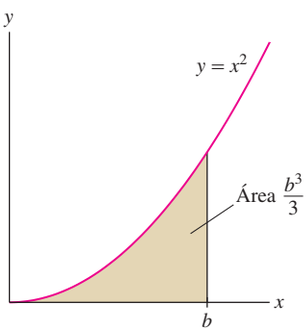


FIGURA 13

EJEMPLO 5 Demuestre que para todo $b > 0$, el área A por debajo de la gráfica de $f(x) = x^2$ en $[0, b]$ es igual a $b^3/3$, tal y como se muestra en la figura 13.

Solución Realizaremos el cálculo en base a R_N. Se tiene que $\Delta x = (b - 0)/N = b/N$ y

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(0 + j\Delta x) = \frac{b}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(0 + j\frac{b}{N}\right)^2 = \frac{b}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(j^2\frac{b^2}{N^2}\right) = \frac{b^3}{N^3}\sum_{j=1}^{N}j^2$$

RECORDATORIO *Según la ec. (4)*

$$\sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

Según la fórmula para la suma de potencias que se encuentra en el recordatorio al margen,

$$R_N = \frac{b^3}{N^3}\left(\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}\right) = \frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2N} + \frac{b^3}{6N^2}$$

$$A = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2N} + \frac{b^3}{6N^2}\right) = \frac{b^3}{3}$$

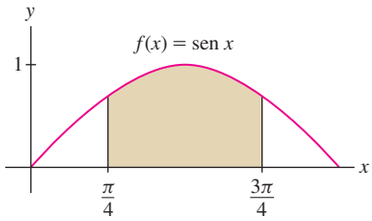


FIGURA 14 El cálculo del área de esta región presenta dificultades cuando se obtiene como límite de aproximaciones basadas en extremos.

El área por debajo de la gráfica de cualquier polinomio se puede obtener usando fórmulas para sumas de potencias, como en los ejemplos anteriores. Para otras funciones, puede ser costoso, o incluso imposible, evaluar el límite que define el área directamente. Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$. En este caso (figura 14), $\Delta x = (3\pi/4 - \pi/4)/N = \pi/(2N)$ y el área A es:

$$A = \lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi j}{2N}\right)$$

Con algo de trabajo, se puede probar que el límite es igual a $A = \sqrt{2}$. Sin embargo, en la sección 5.3 veremos que es mucho más sencillo aplicar el teorema fundamental del cálculo, que reduce el problema del cálculo de áreas al de la determinación de primitivas.

PERSPECTIVA HISTÓRICA

Jacob Bernoulli (1654-1705)

Hemos utilizado las fórmulas para las potencias de orden k, con $k = 1, 2, 3$. Cabe preguntarse si existen fórmulas análogas para potencias de cualquier orden k. Este problema fue estudiado, y finalmente solucionado sobre el 1690, por el gran matemático suizo Jacob Bernoulli. De su descubrimiento, escribió:

Con su ayuda [la de estas fórmulas] fui capaz de determinar, en menos de un cuarto de hora, que la suma de las potencias de orden 10 para los 1000 primeros enteros positivos es igual a:

91409924241424243424241924242500

La fórmula general de Bernoulli es,

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \frac{k}{12} n^{k-1} + \dots$$

Los puntos indican términos que involucran potencias de órdenes inferiores y cuyos coeficientes se expresan mediante los llamados números de Bernoulli. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 - \frac{1}{30} n$$

Estas fórmulas se encuentran implementadas en la mayor parte de los sistemas de álgebra computacional.

5.1 RESUMEN

- Aproximaciones del área por debajo de la gráfica de $f(x)$ en $[a, b]$ $\left(\Delta x = \dfrac{b-a}{N}\right)$:

$$R_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f(a + j\Delta x) = \Delta x(f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \cdots + f(a + N\Delta x))$$

$$L_N = \Delta x \sum_{j=0}^{N-1} f(a + j\Delta x) = \Delta x(f(a) + f(a + \Delta x) + \cdots + f(a + (N-1)\Delta x))$$

$$M_N = \Delta x \sum_{j=1}^{N} f\left(a + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)$$

$$= \Delta x\left(f\left(a + \frac{1}{2}\Delta x\right) + \cdots + f\left(a + \left(N - \frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\right)$$

Suma de potencias

$$\sum_{j=1}^{N} j = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

$$\sum_{j=1}^{N} j^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \frac{N^4}{4} + \frac{N^3}{2} + \frac{N^2}{4}$$

- Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces las aproximaciones basadas en los extremos y en el punto medio se aproximan entre ellas y tienden al mismo límite L:

$$\lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty} M_N = L$$

- Si $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, se define el área por debajo de la gráfica de $y = f(x)$ en $[a, b]$ como L.

5.1 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Si se divide $[2, 5]$ en seis subintervalos, ¿cuáles son los extremos superiores e inferiores resultantes?

2. Se divide el intervalo $[1, 5]$ en ocho subintervalos.

(a) ¿Cuál es el extremo inferior del último subintervalo?

(b) ¿Cuáles son los extremos superiores de los dos primeros subintervalos?

3. ¿Cuáles de los siguientes pares de sumas son diferentes?

(a) $\sum_{i=1}^{4} i, \quad \sum_{\ell=1}^{4} \ell$

(b) $\sum_{j=1}^{4} j^2, \quad \sum_{k=2}^{5} k^2$

(c) $\sum_{j=1}^{4} j, \quad \sum_{i=2}^{5} (i-1)$

(d) $\sum_{i=1}^{4} i(i+1), \quad \sum_{j=2}^{5} (j-1)j$

4. Razone por qué $\sum_{j=1}^{100} j = \sum_{j=0}^{100} j$, pero $\sum_{j=1}^{100} 1$ no es igual a $\sum_{j=0}^{100} 1$.

5. Razone por qué $L_{100} \geq R_{100}$ para $f(x) = x^{-2}$ en $[3, 7]$.

Problemas

1. En la figura 15 se muestra la velocidad de un objecto a durante un intervalo de 3 minutos. Determine la distancia recorrida durante el intervalo $[0, 3]$ y durante el intervalo $[1, 2{,}5]$ (recuerde que se debe realizar la conversión de km/h a km/min).

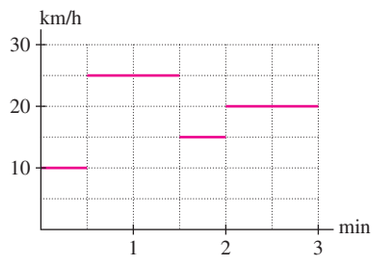


FIGURA 15

2. Un avestruz (figura 16) corre a una velocidad de 20 km/h durante 2 minutos, de 12 km/h durante 3 minutos y de 40 km/h durante otro minuto. Calcule la distancia total recorrida e ilustre, mediante una gráfica, la posible interpretación de esta cantidad como un área.

FIGURA 16 Los avestruces pueden alcanzar velocidades de hasta 70 km/h.

3. En Octubre de 1996 cayó una fuerte tormenta en Portland (Maine), dando lugar a un récord de precipitaciones. En la siguiente tabla se encuentra el registro de la tasa de precipitación $R(t)$ (en centímetros por hora) obtenido durante el 21 de Octubre, siendo t el número de horas desde la medianoche. Calcule la cantidad total de precipitación durante este periodo de 24 horas e ilustre, mediante una gráfica, la posible interpretación de esta cantidad como un área.

t (h)	0-2	2-4	4-9	9-12	12-20	20-24
$R(t)$ (cm)	0,5	0,3	1,0	2,5	1,5	0,6

4. La velocidad de un objeto es $v(t) = 12t$ m/s. Aplicando la ec. (2) y fórmulas pertinentes de geometría plana, encuentre la distancia recorrida en el intervalo $[0, 2]$ y en el intervalo $[2, 5]$.

5. Obtenga R_5 y L_5 en $[0, 1]$ utilizando la siguiente tabla de valores:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x)$	50	48	46	44	42	40

6. La velocidad de un cierto objeto a intervalos de medio segundo se encuentra registrada en la siguiente tabla. En base a ésta, calcule R_6, L_6 y M_3 para estimar la distancia recorrida.

t (s)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
v (m/s)	0	12	18	25	20	14	20

7. Sea $f(x) = 2x + 3$.

(a) Calcule R_6 y L_6 en $[0, 3]$.

(b) Aplicando geometría plana, determine el área exacta A y calcule los errores $|A - R_6|$ y $|A - L_6|$ cometidos en las aproximaciones.

8. Repita el ejercicio 7 para $f(x) = 20 - 3x$ en $[2, 4]$.

9. Calcule R_3 y L_3 para $f(x) = x^2 - x + 4$ en $[1, 4]$. A continuación, dibuje la gráfica de f y los rectángulos para cada aproximación. ¿Es el área por debajo de la gráfica mayor o menor que R_3? ¿Y que L_3?

10. Sea $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ y $\Delta x = \frac{1}{3}$. Dibuje la gráfica de $f(x)$ y los rectángulos basados en el extremo superior, cuya área se obtiene mediante la suma $\sum_{i=1}^{6} f(1 + i\Delta x)\Delta x$.

11. Estime R_3, M_3 y L_6 en $[0, 1{,}5]$ para la función dada por la figura 17.

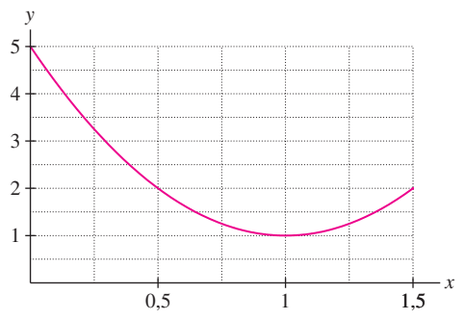


FIGURA 17

12. Calcule el área de los rectángulos sombreados en la figura 18. ¿Qué aproximación representan estos rectángulos?

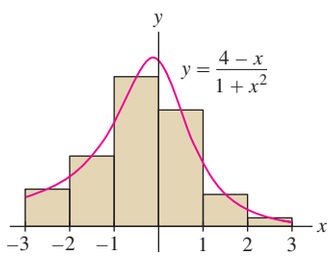


FIGURA 18

Calcule la aproximación requerida en cada uno de los ejercicios 13-20, para la función e intervalo facilitados.

13. R_3, $f(x) = 7 - x$, $[3, 5]$

14. L_6, $f(x) = \sqrt{6x + 2}$, $[1, 3]$

15. M_6, $f(x) = 4x + 3$, $[5, 8]$

16. R_5, $f(x) = x^2 + x$, $[-1, 1]$

17. L_6, $f(x) = x^2 + 3|x|$, $[-2, 1]$

18. M_4, $f(x) = \sqrt{x}$, $[3, 5]$

19. L_4, $f(x) = \cos^2 x$, $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

20. M_4, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $[1, 5]$

En los ejercicios 21-26, escriba la suma correspondiente con notación sumatoria.

21. $4^7 + 5^7 + 6^7 + 7^7 + 8^7$

22. $(2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) + (5^2 + 5)$

23. $(2^2 + 2) + (2^3 + 2) + (2^4 + 2) + (2^5 + 2)$

24. $\sqrt{1 + 1^3} + \sqrt{2 + 2^3} + \cdots + \sqrt{n + n^3}$

25. $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{n}{(n + 1)(n + 2)}$

26. $\operatorname{sen}(\pi) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n + 1}\right)$

27. Calcule las sumas:

(a) $\sum_{i=1}^{5} 9$ **(b)** $\sum_{i=0}^{5} 4$ **(c)** $\sum_{k=2}^{4} k^3$

28. Calcule las sumas:

(a) $\sum_{j=3}^{4} \operatorname{sen}\left(j\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\sum_{k=3}^{5} \frac{1}{k - 1}$ **(c)** $\sum_{j=0}^{2} 3^{j-1}$

29. Sea $b_1 = 4$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$ y $b_4 = -4$. Calcule:

(a) $\sum_{i=2}^{4} b_i$ **(b)** $\sum_{j=1}^{2} (2^{b_j} - b_j)$ **(c)** $\sum_{k=1}^{3} kb_k$

30. Suponiendo que $a_1 = -5$, $\sum_{i=1}^{10} a_i = 20$ y $\sum_{i=1}^{10} b_i = 7$, calcule:

(a) $\sum_{i=1}^{10} (4a_i + 3)$ **(b)** $\sum_{i=2}^{10} a_i$ **(c)** $\sum_{i=1}^{10} (2a_i - 3b_i)$

31. Calcule $\sum_{j=101}^{200} j$. *Indicación:* Escriba el sumatorio como la diferencia de dos sumas y aplique la fórmula (3).

32. Calcule $\sum_{j=1}^{30} (2j + 1)^2$. *Indicación:* Expandir y aplique las fórmulas (3)-(4).

En los ejercicios 33-40, aplique la linealidad y las fórmulas (3)-(5) para reescribir y evaluar después las sumas.

33. $\sum_{j=1}^{20} 8j^3$

34. $\sum_{k=1}^{30} (4k - 3)$

35. $\sum_{n=51}^{150} n^2$

36. $\sum_{k=101}^{200} k^3$

37. $\sum_{j=0}^{50} j(j - 1)$

38. $\sum_{j=2}^{30} \left(6j + \frac{4j^2}{3}\right)$

39. $\sum_{m=1}^{30} (4 - m)^3$

40. $\sum_{m=1}^{20} \left(5 + \frac{3m}{2}\right)^2$

En los ejercicios 41-44, evalúe el límite aplicando las fórmulas (3)-(5).

41. $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N^2}$

42. $\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \frac{j^3}{N^4}$

43. $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{i^2 - i + 1}{N^3}$

44. $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i^3}{N^4} - \frac{20}{N}\right)$

En los ejercicios 45-50, calcule el límite para la función e intervalo facilitados. Verifique las respuestas obtenidas mediante razonamientos de geometría plana.

45. $\lim_{N\to\infty} R_N, \quad f(x) = 9x, \quad [0, 2]$

46. $\lim_{N\to\infty} R_N, \quad f(x) = 3x + 6, \quad [1, 4]$

47. $\lim_{N\to\infty} L_N, \quad f(x) = \frac{1}{2}x + 2, \quad [0, 4]$

48. $\lim_{N\to\infty} L_N, \quad f(x) = 4x - 2, \quad [1, 3]$

49. $\lim_{N\to\infty} M_N, \quad f(x) = x, \quad [0, 2]$

50. $\lim_{N\to\infty} M_N, \quad f(x) = 12 - 4x, \quad [2, 6]$

51. Sea $f(x) = 3x^2 + 4x$, $x \in [0, 2]$. Demuestre que:

$$R_N = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{24j^2}{N^2} + \frac{16j}{N}\right)$$

A continuación, evalúe el $\lim_{N\to\infty} R_N$.

52. Sea $f(x) = 3x^3 - x^2$, $x \in [1, 5]$. Demuestre que:

$$R_N = \frac{4}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{192j^3}{N^3} + \frac{128j^2}{N^2} + \frac{28j}{N} + 2\right)$$

A continuación, evalúe el $\lim_{N\to\infty} R_N$.

En los ejercicios 53-60, halle una fórmula para R_N y calcule el área por debajo de la gráfica como un límite.

53. $f(x) = x^2, \quad [0, 1]$

54. $f(x) = x^2, \quad [-1, 5]$

55. $f(x) = 6x^2 - 4, \quad [2, 5]$

56. $f(x) = x^2 + 7x, \quad [6, 11]$

57. $f(x) = x^3 - x, \quad [0, 2]$

58. $f(x) = 2x^3 + x^2, \quad [-2, 2]$

59. $f(x) = 2x + 1, \quad [a, b] \quad (a, b$ constantes tales que $a < b)$

60. $f(x) = x^2, \quad [a, b] \quad (a, b$ constantes tales que $a < b)$

En los ejercicios 61-64, describa el área representada por los límites.

61. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{j}{N}\right)$

62. $\lim_{N\to\infty} \frac{3}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(2 + \frac{3j}{N}\right)^4$

63. $\lim_{N\to\infty} \frac{5}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(-2 + 5\frac{j}{N}\right)^4$

64. $\lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4N} + \frac{j\pi}{2N}\right)$

En los ejercicios 65-70, exprese el área por debajo de la gráfica mediante la aproximación indicada, dando el resultado en notación sumatoria pero sin proceder a su evaluación.

65. $R_N, \quad f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

66. $R_N, \quad f(x) = x^{-1}$ en $[1, 7]$

67. $L_N, \quad f(x) = \sqrt{2x + 1}$ en $[7, 11]$

68. $L_N, \quad f(x) = \cos x$ en $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}]$

69. $M_N, \quad f(x) = \tan x$ en $[\frac{1}{2}, 1]$

70. $M_N, \quad f(x) = x^{-2}$ en $[3, 5]$

71. Evalúe $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^2}$ interpretando este límite como parte del área de una figura geométrica conocida.

En los ejercicios 72-74, sean $f(x) = x^2$ y R_N, L_N y M_N las aproximaciones correspondientes, en el intervalo $[0, 1]$.

72. Demuestre que $R_N = \frac{1}{3} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}$. Interprete $\frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}$ como el área de una cierta región.

73. Demuestre que:

$$L_N = \frac{1}{3} - \frac{1}{2N} + \frac{1}{6N^2}, \qquad M_N = \frac{1}{3} - \frac{1}{12N^2}$$

A continuación, ordene las tres aproximaciones R_N, L_N y M_N en orden creciente de precisión (utilice el ejercicio 72).

74. Para cada una de las tres aproximaciones, R_N, L_N y M_N, halle el menor entero N para el que el error es inferior a 0,001.

En los ejercicios 75-80, aplique los argumentos del **Apunte gráfico**, *en la página 249, para obtener cotas del área.*

75. Sea A el área bajo $f(x) = \sqrt{x}$ en $[0, 1]$. Demuestre que $0{,}51 \le A \le 0{,}77$ mediante el cálculo de R_4 y de L_4. Explique los razonamientos seguidos.

76. Utilice R_5 y L_5 para demostrar que el área A bajo $y = x^{-2}$ en $[10, 13]$ verifica $0{,}0218 \le A \le 0{,}0244$.

77. Utilice R_4 y L_4 para demostrar que el área A por debajo de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$ verifica $0{,}79 \le A \le 1{,}19$.

78. Demuestre que el área A bajo $f(x) = x^{-1}$ en $[1, 8]$ verifica:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8} \le A \le 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}$$

79. SAC Demuestre que el área A bajo $y = x^{1/4}$ en $[0, 1]$ cumple $L_N \le A \le R_N$ para todo N. Utilice un sistema de álgebra computacional para evaluar L_N y R_N, $N = 100$ y 200, y determine A con dos decimales de precisión.

80. SAC Demuestre que el área A bajo $y = 4/(x^2+1)$ en $[0, 1]$ verifica $R_N \le A \le L_N$ para todo N. Utilizando un sistema de álgebra computacional, determine A con tres decimales, como mínimo, de precisión. ¿Qué valor exacto, se puede suponer, tiene A?

Problemas avanzados

81. Aunque la precisión de R_N generalmente mejora cuando N aumenta, esto no tiene porqué ser cierto para valores pequeños de N. Dibuje la gráfica de una función $f(x)$, positiva sobre un intervalo, tal que R_1 aproxime mejor que R_2 al área exacta por debajo de la gráfica. Una función que cumpliera esta condición ¿podría ser monótona?

82. Dibuje la gráfica de una función continua y positiva en un intervalo, para la que tanto R_2 como L_2 sean más pequeños que el área exacta por debajo de la gráfica. Una función que cumpliere esta condición ¿podría ser monótona?

83. Ilustre gráficamente la siguiente afirmación: *Las aproximaciones basadas en los extremos son menos precisas cuanto mayor sea* $f'(x)$.

84. Demuestre que para cualquier función $f(x)$ en $[a, b]$,

$$R_N - L_N = \frac{b-a}{N}(f(b) - f(a)) \qquad \boxed{8}$$

85. En este ejercicio, se demostrará que si $f(x)$ es estrictamente creciente, entonces $\lim_{N\to\infty} R_N$ y $\lim_{N\to\infty} L_N$ existen y son iguales [la situación en que $f(x)$ es estrictamente decreciente se demuestra de forma análoga]. Utilizaremos el concepto de supremo, que se puede consultar en el apéndice B.

(a) Ilustre mediante una representación gráfica adecuada, por qué $L_N \le R_M$ para todo $N, M \ge 1$.

(b) Según (a), la sucesión $\{L_N\}$ está acotada, por tanto existe un valor L que es el supremo de la sucesión. Por definición, L es el menor número tal que $L_N \le L$ para todo N. Demuestre que $L \le R_M$ para todo M.

(c) En base a (b), $L_N \le L \le R_N$ para todo N. Aplique la ec. (8) para demostrar que $\lim_{N\to\infty} L_N = L$ y $\lim_{N\to\infty} R_N = L$.

86. Utilice la ec. (8) para demostrar que si $f(x)$ es positiva y monótona, entonces el área A por debajo de la gráfica en $[a, b]$ verifica:

$$|R_N - A| \le \frac{b-a}{N}\,|f(b) - f(a)| \qquad \boxed{9}$$

En los ejercicios 87-88 y para cada función e intervalo facilitados, aplique la ec. (9) para determinar un valor de N tal que $|R_N - A| < 10^{-4}$.

87. $f(x) = \sqrt{x}$, $[1, 4]$

88. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $[0, 3]$

89. Demuestre que, si $f(x)$ es positiva y monótona, entonces M_N se encuentra entre R_N y L_N y que, además, está más próximo al área exacta por debajo de la gráfica de lo que lo están R_N o L_N. *Indicación:* En la situación en que $f(x)$ es estrictamente creciente, la figura 19 muestra que la parte del error en R_N debida al i-ésimo rectángulo, es la suma de las áreas $A + B + D$ y para M_N es $|B - E|$. Además, $A \ge E$.

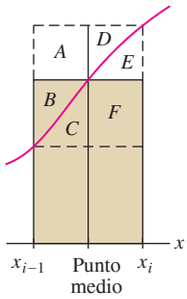


FIGURA 19

5.2 Integral definida

En la sección anterior se vio que, si $f(x)$ era continua en un intervalo $[a, b]$, entonces las aproximaciones basadas en los extremos y la basada en el punto medio tendían a un límite común L cuando $N \to \infty$:

$$L = \lim_{N\to\infty} R_N = \lim_{N\to\infty} L_N = \lim_{N\to\infty} M_N \qquad \boxed{1}$$

Si $f(x) \ge 0$, L es el área por debajo de la gráfica de $f(x)$. A continuación, se enunciará formalmente que L es la *integral definida* de $f(x)$ en $[a, b]$. Antes, se van a introducir unas aproximaciones de carácter más general denominadas **sumas de Riemann**.

Tal y como se ha visto anteriormente, para obtener R_N, L_N y M_N se consideran rectángulos de la misma amplitud Δx, cuyas alturas son los valores de $f(x)$ en los extremos o puntos medios de los subintervalos. Para las sumas de Riemann, estos requisitos son menos estrictos: los rectángulos no tienen porqué tener todos la misma amplitud y la altura puede ser *cualquier* valor $f(x)$ del subintervalo.

Para construir una suma de Riemann, se selecciona una partición y un conjunto de puntos intermedios:

- **Partición** P de tamaño N: es un conjunto de puntos que divide $[a, b]$ en N subintervalos.
$$P\colon a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$
- **Puntos intermedios** $C = \{c_1, \ldots, c_N\}$: donde c_i pertenece al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para todo i, $i \le i \le N$.

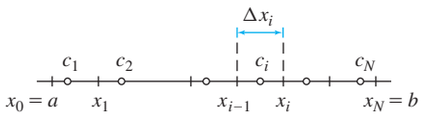


FIGURA 1 Partición de tamaño N y conjunto de puntos intermedios.

Ver las figuras 1 y 2(A). La longitud del i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es

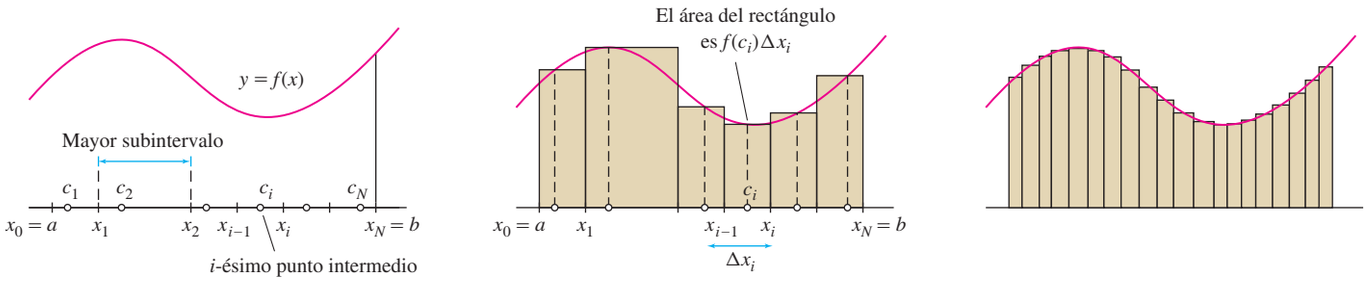
$$\boxed{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}}$$

La **norma** de P, que se denotará $\|P\|$, es la mayor de las longitudes Δx_i.

Dados P y C, se construye el rectángulo de altura $f(c_i)$ y base Δx_i sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, tal y como se ilustra en la figura 2(B). El área de este rectángulo es $f(c_i)\Delta x_i$, si $f(c_i) \geq 0$. Si $f(c_i) < 0$, el rectángulo se sitúa por debajo del eje x y $f(c_i)\Delta x_i$ es el opuesto de esta área. La suma de Riemann es la suma:

Observemos que R_N, L_N y M_N son casos particulares de sumas de Riemann en las que $\Delta x_i = (b - a)/N$, para todo i, y los puntos intermedios c_i son o bien los extremos, o bien los puntos medios.

$$\boxed{R(f, P, C) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_N)\Delta x_N} \quad \boxed{2}$$



(A) Partición de $[a, b]$ en subintervalos.

(B) Construcción del rectángulo de altura $f(c_i)$ por encima de cada subintervalo.

(C) Rectángulos correspondientes a una suma de Riemann para la que $\|P\|$ es pequeña (gran número de rectángulos).

FIGURA 2 Construcción de $R(f, P, C)$.

■ **EJEMPLO 1** Calcule $R(f, P, C)$ para $f(x) = 8 + 12 \operatorname{sen} x - 4x$ en $[0, 4]$,

$$P : x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = 1{,}8 < x_3 = 2{,}9 < x_4 = 4$$
$$C = \{0{,}4, 1{,}2, 2, 3{,}5\}$$

¿Qué valor tiene la norma $\|P\|$?

Solución Las amplitudes de los subintervalos de la partición (figura 3) son

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 1 - 0 = 1 \qquad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = 1{,}8 - 1 = 0{,}8$$
$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = 2{,}9 - 1{,}8 = 1{,}1 \qquad \Delta x_4 = x_4 - x_3 = 4 - 2{,}9 = 1{,}1$$

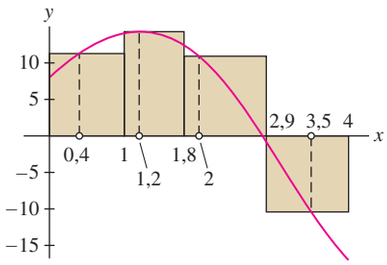


FIGURA 3 Rectángulos definidos por una suma de Riemann para $f(x) = 8 + 12 \operatorname{sen} x - 4x$.

La norma de la partición es $\|P\| = 1{,}1$, pues la mayor de las longitudes de los subintervalos es 1,1 (que corresponde a dos de ellos). Operando con calculadora, se obtiene:

$$R(f, P, C) = f(0{,}4)\Delta x_1 + f(1{,}2)\Delta x_2 + f(2)\Delta x_3 + f(3{,}5)\Delta x_4 \approx$$
$$\approx 11{,}07(1) + 14{,}38(0{,}8) + 10{,}91(1{,}1) - 10{,}2(1{,}1) \approx 23{,}35$$ ■

En la figura 2(C), cabe observar que cuando la norma $\|P\|$ tiende a cero (es decir, que los rectángulos son más estrechos), el número de rectángulos N tiende a ∞ y aproximan con más precisión el área por debajo de la gráfica. Esto nos lleva a la siguiente definición: $f(x)$ es **integrable** en $[a, b]$ si *todas* las sumas de Riemann (y no sólo las aproximaciones basadas en los extremos o en el punto medio) se aproximan unas a otras y hacia el mismo límite L cuando $\|P\|$ tiende a cero. De manera formal,

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} R(f, P, C) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i \quad \boxed{3}$$

Si $|R(f, P, C) - L|$ se hace arbitrariamente pequeño cuando $\|P\|$ tiende a cero, no importa cómo escojamos la partición o los puntos intermedios. El límite L se denomina la **integral definida** de $f(x)$ en $[a, b]$.

La notación $\int f(x)\,dx$ fue introducida por Leibniz en 1686. El símbolo $\int$ es una S alargada que indica "sumatorio". El diferencial dx corresponde a la longitud Δx_i a lo largo del eje x.

DEFINICIÓN 1 Integral definida La integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$, que se denota mediante el símbolo integral, es el límite de las sumas de Riemann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} R(f, P, C) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i$$

Si este límite existe, se dice que $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.

Riemann fue uno de los matemáticos más importantes del siglo XIX, se podría decir que el segundo, tras su profesor C. F. Gauss, Las aportaciones de Riemann en geometría, análisis y teoría de números supusieron una renovación en estos campos. Albert Einstein basó su Teoría de la relatividad general *en la geometría Riemanniana. La "hipótesis de Riemann", que trata sobre números primos, es uno de los grandes problemas aún sin resolver de las matemáticas actuales. La Fundación Clay ha ofrecido 1 millón de dólares de premio por su solución. (http://www.claymath.org/millennium).*

A menudo nos referimos a la integral definida simplemente como la *integral* de $f(x)$ en $[a, b]$. El proceso de cálculo de las integrales se llama **integración**. La función $f(x)$ se denomina **integrando**. Los extremos a y b de $[a, b]$ son los **límites de integración**. Como apunte final, cabe observar que se puede usar cualquier variable como variable de integración (es una variable "muda"). Así, las tres integrales siguientes se refieren a la misma cantidad:

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \int_a^b f(t)\,dt \qquad \int_a^b f(u)\,du$$

Georg Friedrich Riemann (1826-1866)

UN APUNTE CONCEPTUAL Se debe tener presente que una suma de Riemann no es nada más que una aproximación del área basada en rectángulos, y que $\int_a^b f(x)\,dx$ es el valor que se obtiene al pasar al límite cuando se consideran rectángulos cada vez más estrechos.

Sin embargo, raramente consideraremos las sumas de Riemann generales (en base a particiones y puntos arbitrarios) para realizar cálculos. En la práctica, se utilizan aproximaciones particulares, tales como M_N, o bien el teorema fundamental del cálculo, que se tratará en la siguiente sección. En tal caso, ¿por qué preocuparnos en introducir las sumas de Riemann? La respuesta es que las sumas de Riemann desempeñan un papel teórico, más que aplicado. Son útiles en demostraciones y para tratar con rigor ciertas funciones discontinuas. En las últimas secciones, se utilizarán las sumas de Riemann para mostrar cómo se pueden expresar volúmenes y otras cantidades mediante integrales definidas.

En el siguiente teorema se establece que las funciones continuas (e incluso las funciones con un número finito de discontinuidades de salto) son integrables (la demostración se puede consultar en el apéndice D). En la práctica, en lugar de probar directamente que una función es integrable, se opta por aplicar este teorema.

TEOREMA 1 Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ o si $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto en un número finito de puntos, entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.

Intepretación de la integral definida como un área con signo

Cuando $f(x) \geq 0$, la integral definida corresponde al área por debajo de la gráfica. Para interpretar la integral cuando $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos, se define el concepto de **área con signo**, en la que se considera que las regiones por debajo del eje x tienen "área negativa" (figura 4); es decir,

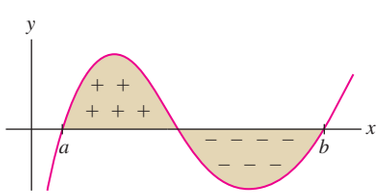


FIGURA 4 El área con signo es el área por encima del eje x menos el área por debajo del eje x.

Área con signo de una región = (área por encima del eje x) − (área por debajo del eje x)

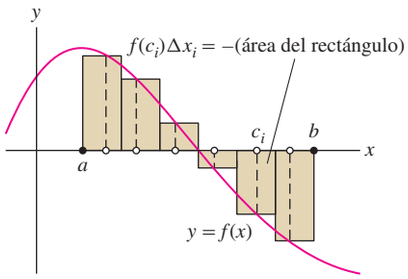


FIGURA 5

Se puede ahora constatar que una suma de Riemann es igual al área con signo de los correspondientes rectángulos:

$$R(f, C, P) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_N)\Delta x_N$$

De hecho, si $f(c_i) < 0$, entonces el correspondiente rectángulo se encuentra por debajo del eje x y tiene área con signo igual a $f(c_i)\Delta x_i$ (figura 5). El límite de las sumas de Riemann es el área, con signo, de la región limitada por la gráfica y el eje x:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{área, con signo, de la región limitada por la gráfica y el eje } x \text{ en } [a, b]$$

EJEMPLO 2 Área con signo Calcule

$$\int_0^5 (3 - x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^5 |3 - x|\,dx$$

Solución La región entre $y = 3 - x$ y el eje x entre 0 y 5 está formada por dos triángulos de áreas $\frac{9}{2}$ y 2 [figura 6(A)]. Sin embargo, el segundo triángulo se encuentra por debajo del eje x y, por tanto, tiene área -2. En la gráfica de $y = |3 - x|$, ambos triángulos se encuentran por encima del eje x [figura 6(B)]. En consecuencia,

$$\int_0^5 (3 - x)\,dx = \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2} \qquad \int_0^5 |3 - x|\,dx = \frac{9}{2} + 2 = \frac{13}{2}$$

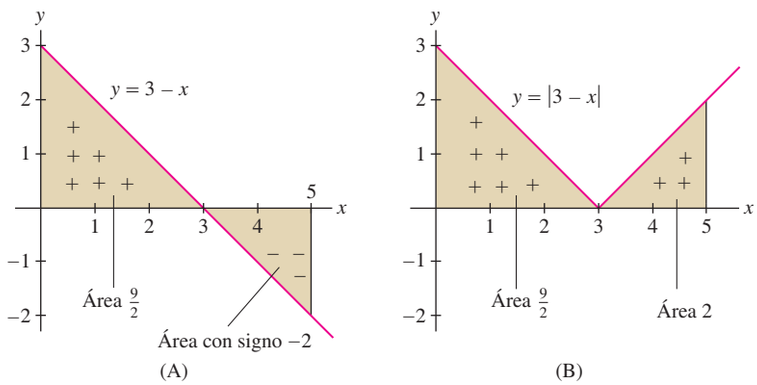


FIGURA 6

Propiedades de la integral definida

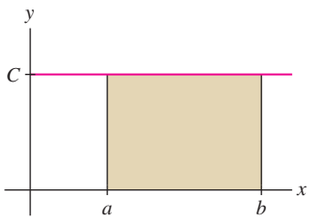


FIGURA 7 $\int_a^b C\,dx = C(b - a)$.

Dedicaremos el resto de la sección a examinar algunas propiedades básicas de las integrales definidas. En primer lugar, observemos que la integral de una función constante $f(x) = C$ en un intervalo $[a, b]$ es el área con signo $C(b - a)$ de un rectángulo (figura 7).

TEOREMA 2 Integral de una constante Para cualquier constante C,

$$\int_a^b C\,dx = C(b - a) \qquad \boxed{4}$$

A continuación, se enuncian las propiedades de linealidad de la integral.

TEOREMA 3 Linealidad de la integral definida Si f y g son integrables en $[a, b]$, entonces $f + g$ y Cf son integrables (para cualquier constante C) y se verifica:

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
- $\displaystyle\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$

Demostración La demostración de estas propiedades se basa en las correspondientes propiedades de linealidad para las sumas y para los límites. Por ejemplo, las sumas de Riemann son aditivas:

$$R(f+g, P, C) = \sum_{i=1}^{N} (f(c_i) + g(c_i))\Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{N} g(c_i)\Delta x_i$$

$$= R(f, P, C) + R(g, P, C)$$

Por la aditividad de los límites,

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} R(f+g, P, C)$$

$$= \lim_{\|P\|\to 0} R(f, P, C) + \lim_{\|P\|\to 0} R(g, P, C)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

La segunda propiedad de demuestra de forma análoga. ■

■ **EJEMPLO 3** Calcule $\displaystyle\int_0^3 (2x^2 - 5)\,dx$ utilizando la fórmula

$$\boxed{\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}} \qquad (5)$$

La ec. (5) se obtuvo en el ejemplo 5 de la sección 5.1.

Solución

$$\int_0^3 (2x^2 - 5)\,dx = 2\int_0^3 x^2\,dx + \int_0^3 (-5)\,dx \qquad \text{(linealidad)}$$

$$= 2\left(\frac{3^3}{3}\right) - 5(3 - 0) = 3 \qquad \text{[ecs. (5) y (4)]}$$

■

De momento hemos usado la notación $\int_a^b f(x)\,dx$ sobrentendiendo que $a < b$. Es conveniente definir la integral definida para a y b arbitrarios.

*Según la ec. (6), **la integral cambia de signo cuando se intercambian los límites de integración**. Si tenemos libertad para escoger los símbolos como queramos, ¿por qué hemos escogido poner el signo menos en la ec. (6)? La respuesta es que, precisamente con esta definición, el teorema fundamental del cálculo es cierto.*

DEFINICIÓN Intercambio de los límites de integración Si $a < b$,

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx} \qquad (6)$$

Por ejemplo, según la ec. (5),

$$\int_5^0 x^2\,dx = -\int_0^5 x^2\,dx = -\frac{5^3}{3} = -\frac{125}{3}$$

Cuando $a = b$, el intervalo $[a, b] = [a, a]$ tiene longitud igual a cero y, en este caso, se define la integral definida también como cero:

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

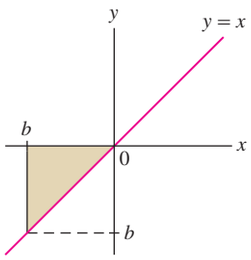


FIGURA 8 En este gráfico, $b < 0$ y el área con signo es igual a $-\frac{1}{2}b^2$.

■ **EJEMPLO 4** Demuestre que, para todo b (positivo o negativo),

$$\boxed{\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2} \qquad \boxed{7}$$

Solución Si $b > 0$, $\int_0^b x\,dx$ es igual a $\frac{1}{2}b^2$, el área de un triángulo de base b y altura b. Si $b < 0$, $\int_b^0 x\,dx$ es el área con signo $-\frac{1}{2}b^2$ del triángulo de la figura 8, y la ec. (7) se obtiene aplicando la regla del intercambio de los límites de integración:

$$\int_0^b x\,dx = -\int_b^0 x\,dx = -\left(-\frac{1}{2}b^2\right) = \frac{1}{2}b^2$$ ■

Las integrales definidas cumplen una propiedad importante de aditividad: si $f(x)$ es integrable y $a \le b \le c$, tal y como se ilustra en la figura 9, entonces la integral de a a c es igual a la integral de a a b *más* la integral de b a c. En el siguiente teorema se enuncia esta propiedad (se puede demostrar formalmente utilizando sumas de Riemann).

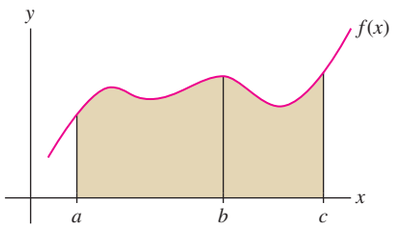


FIGURA 9 El área por encima de $[a, c]$ es la *suma* de las áreas por encima de $[a, b]$ y de $[b, c]$.

TEOREMA 4 Aditividad para intervalos adyacentes Sean $a \le b \le c$ y supongamos que $f(x)$ es integrable. Entonces:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Este teorema continua siendo cierto incluso cuando la condición $a \le b \le c$ no se cumple (Ver el ejercicio 87).

■ **EJEMPLO 5** Calcule $\int_4^7 x^2\,dx$.

Solución En primer lugar, según la propiedad de aditividad para intervalos adyacentes

$$\int_0^4 x^2\,dx + \int_4^7 x^2\,dx = \int_0^7 x^2\,dx$$

Ahora se puede calcular la integral del enunciado como una diferencia:

$$\int_4^7 x^2\,dx = \int_0^7 x^2\,dx - \int_0^4 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}\right)7^3 - \left(\frac{1}{3}\right)4^3 = 93$$ ■

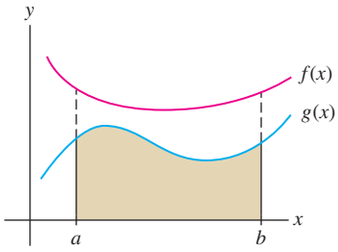


FIGURA 10 La integral de $f(x)$ entre a y b es mayor que la de $g(x)$.

donde se ha aplicado la fórmula $\int_0^b x^2 dx = b^3/3$ del ejemplo 3.

Otra propiedad básica de la integral definida es que si una función es superior a otra, las correspondientes integrales mantienen este orden (figura 10).

TEOREMA 5 Teorema de comparación Si f y g son integrables y $g(x) \le f(x)$ para x en $[a, b]$, entonces se tiene:

$$\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx$$

Demostración Si $g(x) \le f(x)$, para cualquier partición y elección de puntos intermedios, se cumple que $g(c_i)\Delta x_i \le f(c_i)\Delta x_i$ para todo i. En consecuencia, las sumas de Riemann verifican:

$$\sum_{i=1}^{N} g(c_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i$$

Pasando al límite cuando $\|P\|$ tiende a cero, se obtiene:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} g(c_i)\Delta x_i \le \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$ ■

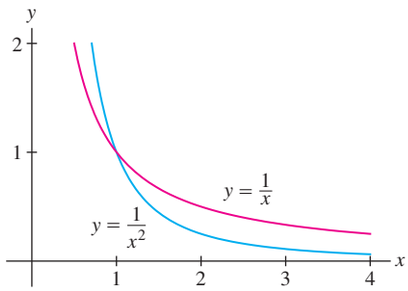


FIGURA 11

■ **EJEMPLO 6** Demuestre la desigualdad: $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x^2}\,dx \le \int_1^4 \frac{1}{x}\,dx$

Solución Si $x \ge 1$, entonces $x^2 \ge x$ y $x^{-2} \le x^{-1}$ [figura 11] En consecuencia, aplicando el teorema de comparación con $g(x) = x^{-2}$ y $f(x) = x^{-1}$, la desigualdad es cierta. ■

Supongamos que existan dos valores m y M tales que $m \le f(x) \le M$ para x en $[a, b]$. Los números m y M se denominan cota inferior y superior, respectivamente, de $f(x)$ en $[a, b]$. Según el teorema de comparación,

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$$

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)} \qquad \boxed{8}$$

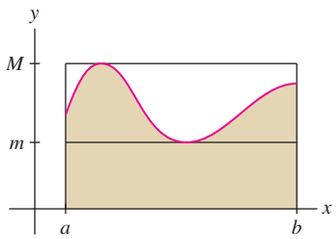


FIGURA 12 La integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se encuentra entre las áreas de los rectángulos de base $b - a$ y alturas m y M.

Es decir, la integral de $f(x)$ se encuentra entre las áreas de dos rectángulos (ver la figura 12).

■ **EJEMPLO 7** Demuestre las desigualdades: $\displaystyle\frac{3}{4} \le \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x}\,dx \le 3$

Solución Como $f(x) = x^{-1}$ es estrictamente decreciente (figura 13), el valor mínimo de la función en $[\frac{1}{2}, 2]$ es $m = f(2) = \frac{1}{2}$ y el máximo es $M = f(\frac{1}{2}) = 2$. Según la ec. (8),

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)}_{m(b-a)} = \frac{3}{4} \le \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x}\,dx \le \underbrace{2\left(2 - \frac{1}{2}\right)}_{M(b-a)} = 3$$ ■

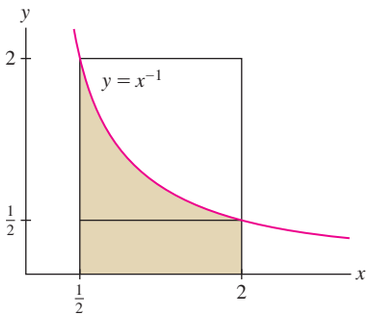


FIGURA 13

5.2 RESUMEN

- Una suma de Riemann $R(f, P, C)$ para el intervalo $[a, b]$ queda determinada mediante la elección de una *partición*

$$P\colon a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

y de unos *puntos intermedios* $C = \{c_i\}_{1\le i\le n}$, donde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Sea $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Entonces

$$R(f, P, C) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\Delta x_i$$

- La norma $\|P\|$ de la partición es el valor máximo de las longitudes Δx_i.
- La *integral definida* es el límite de las sumas de Riemann (siempre que éste exista):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} R(f, P, C)$$

Se dice que $f(x)$ es *integrable* en $[a, b]$ si el límite existe.

- Teorema: si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.
- $\int_a^b f(x)\,dx =$ *área con signo* de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje x entre a y b.
- Propiedades de las integrales definidas:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{para cualquier constante } C$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \quad \text{para todo } a, b, c$$

- Fórmulas:

$$\int_a^b C\,dx = C(b-a) \quad (\text{para cualquier constante } C)$$

$$\int_0^b x\,dx = \frac{1}{2}b^2$$

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{1}{3}b^3$$

- Teorema de comparación: si $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$, entonces se verifica:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Si $m \le f(x) \le M$ en $[a, b]$, entonces se verifica:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

5.2 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿A qué corresponde $\int_3^5 dx$ [la función es $f(x) = 1$]?

2. Sea $I = \int_2^7 f(x)\,dx$, para $f(x)$ una función continua. Determine si es verdadero o falso:

(a) I es el área limitada por la gráfica y el eje x en $[2, 7]$.

(b) Si $f(x) \ge 0$, entonces I es el área limitada por la gráfica y el eje x en $[2, 7]$.

(c) Si $f(x) \le 0$, entonces $-I$ es el área limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje x en $[2, 7]$.

3. Explique gráficamente por qué $\int_0^{\pi} \cos x\,dx = 0$.

4. ¿Cuál de las siguientes integrales es negativa, $\int_{-1}^{-5} 8\,dx$ o $\int_{-5}^{-1} 8\,dx$?

Problemas

En los problemas 1-10, represente gráficamente el área con signo correspondiente a la integral y calcúlela aplicando geometría plana.

1. $\int_{-3}^{3} 2x\,dx$

2. $\int_{-2}^{3} (2x+4)\,dx$

3. $\int_{-2}^{1} (3x+4)\,dx$

4. $\int_{-2}^{1} 4\,dx$

5. $\int_{6}^{8} (7-x)\,dx$

6. $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

7. $\int_{0}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$

8. $\int_{-2}^{3} |x|\,dx$

9. $\int_{-2}^{2} (2-|x|)\,dx$

10. $\int_{-2}^{5} (3+x-2|x|)\,dx$

11. Calcule $\int_0^{10} (8-x)\,dx$ de dos maneras:

(a) Como el límite $\lim_{N\to\infty} R_N$

(b) Representando gráficamente el área con signo correspondiente y aplicando geometría plana.

12. Calcule $\int_{-1}^{4} (4x-8)\,dx$ de dos maneras: como el límite $\lim_{N\to\infty} R_N$ y aplicando geometría plana.

Los problemas 13 y 14 se refieren a la figura 14.

13. Evalúe: (a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^6 f(x)\,dx$

14. Evalúe: (a) $\int_1^4 f(x)\,dx$ (b) $\int_1^6 |f(x)|\,dx$

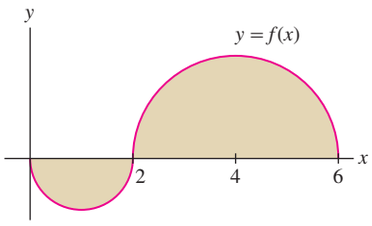


FIGURA 14 Las dos partes del gráfico son semicírculos.

Los problemas 15 y 16 se refieren a la figura 15.

15. Evalúe $\int_0^3 g(t)\,dt$ y $\int_3^5 g(t)\,dt$.

16. Halle a, b y c tales que $\int_0^a g(t)\,dt$ y $\int_b^c g(t)\,dt$ sean lo mayor posible.

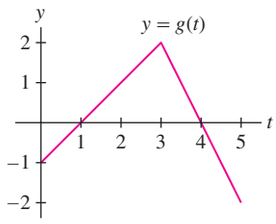


FIGURA 15

17. Describa la partición P y el conjunto de puntos intermedios C que dan lugar a la suma de Riemann representada en la figura 16. Calcule el valor de esta suma de Riemann.

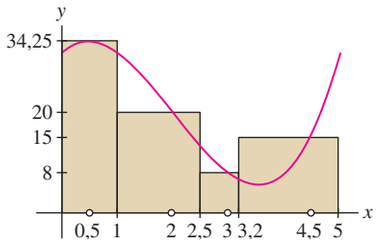


FIGURA 16

18. Calcule $R(f, P, C)$ para $f(x) = x^2 + x$, la partición P y conjunto de puntos intermedios C dados por la figura 16.

En los problemas 19-22, calcular la suma de Riemann $R(f, P, C)$ para la función, partición y elección de puntos intermedios facilitados. Represente gráficamente f y también los rectángulos correspondientes a $R(f, P, C)$.

19. $f(x) = x$, $P = \{1, 1{,}2, 1{,}5, 2\}$, $C = \{1{,}1, 1{,}4, 1{,}9\}$

20. $f(x) = 2x + 3$, $P = \{-4, -1, 1, 4, 8\}$, $C = \{-3, 0, 2, 5\}$

21. $f(x) = x^2 + x$, $P = \{2, 3, 4{,}5, 5\}$, $C = \{2, 3{,}5, 5\}$

22. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $P = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$, $C = \{0{,}4, 0{,}7, 1{,}2\}$

En los problemas 23-28, dibuje el área correspondiente a la integral. Indique las regiones de área positiva y las de área negativa.

23. $\int_0^5 (4x - x^2)\,dx$

24. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \tan x\,dx$

25. $\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

26. $\int_0^{3\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

27. $\int_0^6 (|12-4x| - 4)\,dx$

28. $\int_{-2}^{2} (t^2-1)(t^2-4)\,dx$

En los problemas 29-32, determine el signo de la integral sin realizar el cálculo. Represente la gráfica de la función si fuera necesario.

29. $\int_{-2}^{1} x^4\,dx$

30. $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$

31. GU $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$ **32.** GU $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

En los problemas 33-42, aplique las propiedades de la integral y las fórmulas del resumen para calcular las integrales.

33. $\displaystyle\int_0^4 (6t-3)\, dt$ **34.** $\displaystyle\int_{-3}^2 (4x+7)\, dx$

35. $\displaystyle\int_0^9 x^2\, dx$ **36.** $\displaystyle\int_2^5 x^2\, dx$

37. $\displaystyle\int_0^1 (u^2-2u)\, du$ **38.** $\displaystyle\int_0^{1/2} (12y^2+6y)\, dy$

39. $\displaystyle\int_{-3}^1 (7t^2+t+1)\, dt$ **40.** $\displaystyle\int_{-3}^3 (9x-4x^2)\, dx$

41. $\displaystyle\int_{-a}^1 (x^2+x)\, dx$ **42.** $\displaystyle\int_a^{a^2} x^2\, dx$

En los problemas 43-47, calcule la integral suponiendo que:

$$\int_0^5 f(x)\, dx = 5 \qquad \int_0^5 g(x)\, dx = 12$$

43. $\displaystyle\int_0^5 (f(x)+g(x))\, dx$ **44.** $\displaystyle\int_0^5 \left(2f(x)-\frac{1}{3}g(x)\right) dx$

45. $\displaystyle\int_5^0 g(x)\, dx$ **46.** $\displaystyle\int_0^5 (f(x)-x)\, dx$

47. En base a la información facilitada, ¿se puede calcular

$$\int_0^5 g(x)f(x)\, dx?$$

48. Calculando el límite de las aproximaciones basadas en el extremo superior, demuestre que:

$$\boxed{\int_0^b x^3\, dx = \frac{b^4}{4}} \qquad \boxed{9}$$

En los problemas 49-54, evalúe la integral aplicando las fórmulas del resumen y la ec. (9).

49. $\displaystyle\int_0^3 x^2\, dx$ **50.** $\displaystyle\int_1^3 x^3\, dx$

51. $\displaystyle\int_0^3 (x-x^3)\, dx$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 (2x^3-x+4)\, dx$

53. $\displaystyle\int_0^1 (12x^3+24x^2-8x)\, dx$ **54.** $\displaystyle\int_{-2}^2 (2x^3-3x^2)\, dx$

En los problemas 55-58, calcule la integral, suponiendo que:

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1 \qquad \int_0^2 f(x)\, dx = 4 \qquad \int_1^4 f(x)\, dx = 7$$

55. $\displaystyle\int_0^4 f(x)\, dx$ **56.** $\displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx$

57. $\displaystyle\int_4^1 f(x)\, dx$ **58.** $\displaystyle\int_2^4 f(x)\, dx$

En los problemas 59-62, exprese el resultado como una sola integral.

59. $\displaystyle\int_0^3 f(x)\, dx + \int_3^7 f(x)\, dx$

60. $\displaystyle\int_2^9 f(x)\, dx - \int_4^9 f(x)\, dx$

61. $\displaystyle\int_2^9 f(x)\, dx - \int_2^5 f(x)\, dx$

62. $\displaystyle\int_7^3 f(x)\, dx + \int_3^9 f(x)\, dx$

En los problemas 63-66, calcule la integral, suponiendo que f es integrable y que $\displaystyle\int_1^b f(x)\, dx = 1 - b^{-1}$ para todo $b > 0$.

63. $\displaystyle\int_1^5 f(x)\, dx$ **64.** $\displaystyle\int_3^5 f(x)\, dx$

65. $\displaystyle\int_1^6 (3f(x)-4)\, dx$ **66.** $\displaystyle\int_{1/2}^1 f(x)\, dx$

67. Explique la diferencia entre la interpretación de $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ y la de $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx$.

68. Sea $f(x)$ una función continua. Utilice la interpretación gráfica de la integral definida para explicar la desigualdad:

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Explique también, por qué la igualdad se asume si y sólo si, o bien $f(x) \ge 0$ para todo x, o bien $f(x) \le 0$ para todo x.

69. Sea $f(x) = x$. Halle un intervalo $[a, b]$ tal que:

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \int_a^b |f(x)|\, dx = \frac{3}{2}$$

70. Evalúe $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$ y $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx$ según se indica a continuación. En primer lugar, ponga de manifiesto gráficamente que $I = J$. A continuación pruebe que $I + J = 2\pi$.

En los problemas 71-74, calcule la integral.

71. $\displaystyle\int_0^6 |3-x|\, dx$ **72.** $\displaystyle\int_1^3 |2x-4|\, dx$

73. $\displaystyle\int_{-1}^1 |x^3|\, dx$ **74.** $\displaystyle\int_0^2 |x^2-1|\, dx$

75. Aplique el teorema de comparación para justificar que:

$$\int_0^1 x^5\, dx \le \int_0^1 x^4\, dx, \qquad \int_1^2 x^4\, dx \le \int_1^2 x^5\, dx$$

76. Demuestre que $\frac{1}{3} \le \int_4^6 \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{2}$.

77. Demuestre que $0{,}0198 \le \int_{0,2}^{0,3} \operatorname{sen} x\,dx \le 0{,}0296$. *Indicación:* Pruebe que $0{,}198 \le \operatorname{sen} x \le 0{,}296$ para todo x en $[0{,}2, 0{,}3]$.

78. Demuestre que $0{,}277 \le \int_{\pi/8}^{\pi/4} \cos x\,dx \le 0{,}363$.

79. Demuestre que $0 \le \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

80. Determine una cota superior y una inferior de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^3+4}}$.

81. Supongamos que $f(x) \le g(x)$ en $[a, b]$. Según el teorema de comparación, $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$. ¿Se verifica también que $f'(x) \le g'(x)$ para $x \in [a, b]$? Si no es cierto, dar un contraejemplo.

82. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si son falsas, dé un contraejemplo gráfico.

(a) Si $f(x) > 0$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

(b) Si $\int_a^b f(x)\,dx > 0$, entonces $f(x) > 0$.

Problemas avanzados

83. Ilustre gráficamente la siguiente afirmación: Si $f(x)$ es una función impar, entonces se cumple:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

84. Calcule $\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))(\operatorname{sen}^2(x) + 1)\,dx$.

85. Sean k y b constantes positivas. Demuestre, comparando las aproximaciones basadas en el extremo superior, que:

$$\int_0^b x^k\,dx = b^{k+1} \int_0^1 x^k\,dx$$

86. Sean f y g funciones continuas tales que, para todo a,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} g(x)\,dx$$

Explique de manera *intuitiva* por qué $f(0) = g(0)$. Ilustre el razonamiento mediante un gráfico.

87. El teorema 4 continúa siendo cierto aunque $a \le b \le c$ no sea cierto. Verifique que realmente es así para las situaciones en que $b < a < c$ y en que $c < a < b$.

5.3 El teorema fundamental del cálculo (TFC), 1ª parte

El TFC fue enunciado por primera vez de forma completa por Isaac Newton en 1666, aunque otros matemáticos, entre ellos el profesor de Newton, Isaac Barrow, habían obtenido con anterioridad versiones de éste.

El teorema fundamental del cálculo (TFC) pone de manifiesto una inesperada conexión entre las dos operaciones principales del cálculo infinitesimal: la diferenciación y la integración. El teorema tiene dos partes, que aunque están fuertemente relacionadas, se tratarán en secciones separadas para enfatizar su diferente aplicación.

Para explicar la primera parte del TFC, retomemos un resultado que se había obtenido en el ejemplo 5 de la sección 5.2:

$$\int_4^7 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}\right)7^3 - \left(\frac{1}{3}\right)4^3 = 93$$

RECORDATORIO

*$F(x)$ se denomina una **primitiva** de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Se dice que $F(x) + C$, siendo C una constante, es una **integral indefinida** de $f(x)$ y se denota:*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Observemos que $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es una primitiva de x^2, de manera que

$$\int_4^7 x^2\,dx = F(7) - F(4)$$

Según la primera parte del TFC, esto no es una coincidencia; esta relación entre la integral definida y la primitiva se cumple en general.

TEOREMA 1 El teorema fundamental del cálculo, 1ª parte Sea $f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \qquad \boxed{1}$$

Demostración La cantidad $F(b) - F(a)$ corresponde a la variación total de F (también llamada "variación neta") en el intervalo $[a, b]$. El objetivo es relacionar esta cantidad con la integral de $F'(x) = f(x)$. Procederemos en dos etapas.

Etapa 1. **Escribir la variación total como suma de pequeñas variaciones**

Fijada una partición cualquiera P de $[a, b]$:

$$P\colon x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

se puede expresar $F(b) - F(a)$ como la suma de las variaciones en cada uno de los intervalos $[x_{i-1}, x_i]$:

$$F(b) - F(a) = (\cancel{F(x_1)} - F(a)) + (F(x_2) - \cancel{F(x_1)}) + \cdots + (F(b) - \cancel{F(x_{N-1})})$$

En la parte derecha de la igualdad, $F(x_1)$ se cancela con $-F(x_1)$, en el segundo término, $F(x_2)$ se cancela con $-F(x_2)$ y así sucesivamente (figura 1). En notación sumatoria,

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{N} (F(x_i) - F(x_{i-1})) \qquad \boxed{2}$$

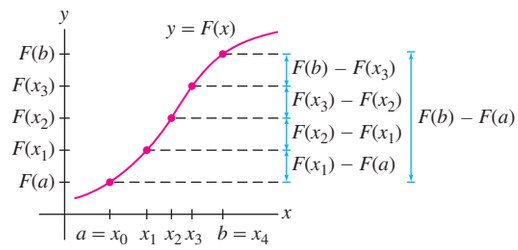


FIGURA 1 Observe las cancelaciones al expresar $F(b) - F(a)$ como la suma de las pequeñas variaciones $F(x_i) - F(x_{i-1})$.

Etapa 2. **Interpretar la ec. (2) como una suma de Riemann**

Según el teorema del valor medio, existe un punto c_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i^*)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i^*)\,\Delta x_i$$

De esta manera, la ec. (2) se puede escribir como

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i^*)\,\Delta x_i$$

Esta suma es precisamente la suma de Riemann $R(f, P, C^*)$ siendo los puntos intermedios $C^* = \{c_i^*\}$.

Según el teorema 1, sección 5.2, $f(x)$ es integrable y, por tanto, $R(f, P, C^*)$ tiende a $\int_a^b f(x)\,dx$, cuando $\|P\|$ tiende a cero. Por otra parte, $R(f, P, C^*)$ es *igual* a $F(b) - F(a)$ gracias a nuestra particular elección de puntos intermedios C^*. De esta manera, queda demostrado el teorema, pues:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|P\| \to 0} R(f, P, C^*) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

UN APUNTE CONCEPTUAL **Las dos gráficas** En la demostración del TFC (1ª parte), se ha aplicado el teorema del valor medio para expresar un pequeño cambio en $F(x)$ en términos de la derivada $F'(x) = f(x)$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i^*)\Delta x_i$$

Pero $f(c_i^*)\Delta x_i$ es el área de un fino rectángulo que aproxima una sección del área de la gráfica de $f(x)$ (ver figura 2). *Éste es el punto esencial del teorema fundamental del cálculo*: la variación total $F(b) - F(a)$ es igual a la suma de las pequeñas variaciones $F(x_i) - F(x_{i-1})$ que, a su vez, son iguales a la suma de las áreas de los rectángulos en una aproximación por sumas de Riemann para $f(x)$. El teorema fundamental del cálculo se obtiene pasando al límite de estas sumas, cuando la longitud de los rectángulos tiende a cero.

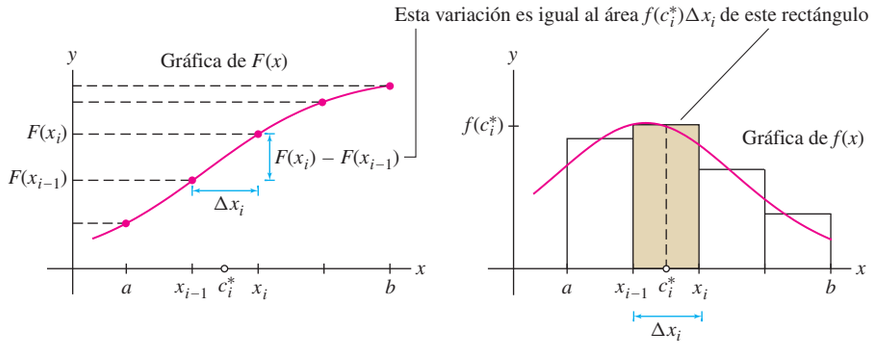


FIGURA 2

Según el TFC (1ª parte), si se puede hallar una primitiva de $f(x)$, entonces se puede obtener de forma sencilla la integral definida, sin necesidad de calcular ningún límite. Esta es la razón de que se utilice el signo integral $\int$ tanto para denotar la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, como la integral indefinida (primitiva) $\int f(x)dx$.

Notación: $F(b)-F(a)$ se denota como $F(x)\Big|_a^b$. Utilizando esta notación, el TFC se expresa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

RECORDATORIO

La regla para el cálculo de integrales de potencias (válida para $n \neq -1$) establece que:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

EJEMPLO 1 Calcule el área bajo la gráfica de $f(x) = x^3$ en $[2, 4]$.

Solución Como $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ es una primitiva de $f(x) = x^3$, según el TFC (1ª parte)

$$\int_2^4 x^3\,dx = F(4) - F(2) = \frac{1}{4}x^4\Big|_2^4 = \frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{4}2^4 = 60$$

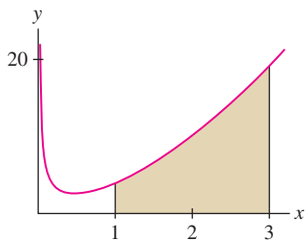


FIGURA 3 Región por debajo de la gráfica de $g(x) = x^{-3/4} + 3x^{5/3}$ en $[1, 3]$.

EJEMPLO 2 Halle el área por debajo de $g(x) = x^{-3/4} + 3x^{5/3}$ en $[1, 3]$.

Solución La función $G(x) = 4x^{1/4} + \frac{9}{8}x^{8/3}$ es una primitiva de $g(x)$. El área (figura 3) es igual a:

$$\int_1^3 (x^{-3/4} + 3x^{5/3})\,dx = G(x)\Big|_1^3 = \left(4x^{1/4} + \frac{9}{8}x^{8/3}\right)\Big|_1^3$$

$$= \left(4 \cdot 3^{1/4} + \frac{9}{8} \cdot 3^{8/3}\right) - \left(4 \cdot 1^{1/4} + \frac{9}{8} \cdot 1^{8/3}\right)$$

$$\approx 26{,}325 - 5{,}125 = 21{,}2$$

EJEMPLO 3 Calcule $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x\,dx$ y dibuje la región correspondiente.

Solución La figura 4 muestra la región motivo de estudio. Teniendo presente que $(\tan x)' = \sec^2 x$, se obtiene:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - (-1) = 2$$

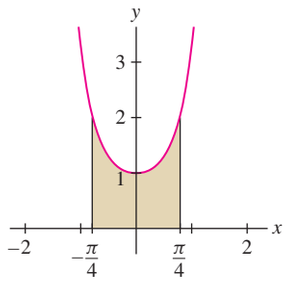


FIGURA 4 Gráfica de $y = \sec^2 x$.

Hemos visto que la integral definida es igual al área *con signo* limitada por la gráfica de la función y el eje x. Por supuesto, el TFC también "lo sabe": cuando se resuelve una integral mediante el TFC se obtiene el área con signo.

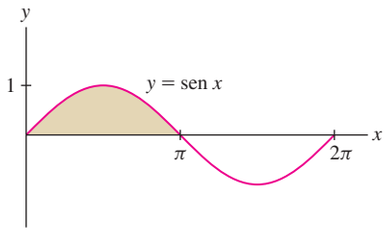


FIGURA 5 El área de una cresta es 2. El área con signo en $[0, 2\pi]$ es cero.

■ **EJEMPLO 4** Calcule **(a)** $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ y **(b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx$.

Solución

(a) Como $(-\cos x)' = \operatorname{sen} x$, el área para una "cresta" (figura 5) es:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

(b) Se espera que el área con signo en $[0, 2\pi]$ sea cero pues el "valle" se encuentra por debajo del eje x. En efecto,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = (-\cos(2\pi) - (-\cos 0)) = -1 - (-1) = 0$$ ■

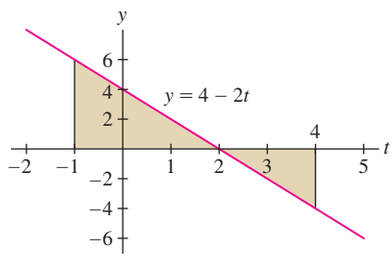


FIGURA 6

■ **EJEMPLO 5** Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{4} (4 - 2t)\,dt$.

Solución La función $F(t) = 4t - t^2$ es una primitiva de $f(t) = 4 - 2t$; por tanto, la integral definida (el área con signo por debajo de la gráfica de la figura 6) es:

$$\int_{-1}^{4} (4 - 2t)\,dt = (4t - t^2)\Big|_{-1}^{4} = (4 \cdot 4 - 4^2) - (4 \cdot (-1) - (-1)^2) = 0 - (-5) = 5$$ ■

UN APUNTE CONCEPTUAL ¿Qué primitiva? Las primitivas son únicas salvo una constante aditiva (sección 4.8). ¿Importa entonces qué primitiva se utiliza en el TFC? La respuesta es que no. Si tanto $F(x)$ como $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) = G(x)+C$, para alguna constante C, y

$$F(b) - F(a) = \underbrace{(G(b) + C) - (G(a) + C)}_{\text{La constante se cancela}} = G(b) - G(a)$$

Las dos primitivas dan lugar al mismo valor para la integral definida:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

5.3 RESUMEN

- El teorema fundamental del cálculo, 1ª parte, establece que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. El TFC (1ª parte) se utiliza para evaluar integrales definidas en situaciones en las que se puede hallar una primitiva del integrando.

- Fórmulas de primitivas básicas para resolver integrales definidas:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{para } n \neq -1$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad\qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

5.3 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Supongamos que $F'(x) = f(x)$ y que $F(0) = 3$, $F(2) = 7$.

(a) Si $f(x) \geq 0$, ¿cuál es el valor del área por debajo de $y = f(x)$ en $[0, 2]$?

(b) Si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación gráfica de $F(2) - F(0)$?

2. Supongamos que $f(x)$ es una función *negativa* con primitiva F tal que $F(1) = 7$ y $F(3) = 4$. ¿Cuál es el valor del área (un número positivo) limitada por el eje x y la gráfica de $f(x)$ en $[1, 3]$?

3. Razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) La 1ª parte del TFC sólo es válida para funciones postivas.

(b) Para poder aplicar la 1ª parte del TFC , se tiene que haber seleccionado la primitiva apropiada.

(c) Si no se puede determinar una primitiva de $f(x)$, entonces la integral definida no existe.

4. Resuelva $\int_2^9 f'(x)\,dx$ donde $f(x)$ es una función diferenciable y $f(2) = f(9) = 4$.

Problemas

En los problemas 1-4, dibuje la región bajo la gráfica de la función y determine su área mediante el TFC (1ª parte).

1. $f(x) = x^2, \quad [0, 1]$

2. $f(x) = 2x - x^2, \quad [0, 2]$

3. $f(x) = x^{-2}, \quad [1, 2]$

4. $f(x) = \cos x, \quad [0, \frac{\pi}{2}]$

En los problemas 5-34, resuelva la integral mediante el TFC (1ª parte).

5. $\int_3^6 x\,dx$

6. $\int_0^9 2\,dx$

7. $\int_{-3}^5 (3t - 4)\,dt$

8. $\int_2^4 (24 - 5u)\,du$

9. $\int_0^1 (4x - 9x^2)\,dx$

10. $\int_{-3}^2 u^2\,du$

11. $\int_0^2 (12x^5 + 3x^2 - 4x)\,dx$

12. $\int_{-2}^2 (10x^9 + 3x^5)\,dx$

13. $\int_3^0 (2t^3 - 6t^2)\,dt$

14. $\int_{-1}^1 (5u^4 + u^2 - u)\,du$

15. $\int_0^4 \sqrt{y}\,dy$

16. $\int_1^8 x^{4/3}\,dx$

17. $\int_{1/16}^1 t^{1/4}\,dt$

18. $\int_4^1 t^{5/2}\,dt$

19. $\int_1^3 \frac{dt}{t^2}$

20. $\int_1^4 x^{-4}\,dx$

21. $\int_{1/2}^1 \frac{8}{x^3}\,dx$

22. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3}\,dx$

23. $\int_1^2 (x^2 - x^{-2})\,dx$

24. $\int_1^9 t^{-1/2}\,dt$

25. $\int_1^{27} \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt$

26. $\int_{8/27}^1 \frac{10t^{4/3} - 8t^{1/3}}{t^2}\,dt$

27. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen}\theta\,d\theta$

28. $\int_{2\pi}^{4\pi} \operatorname{sen} x\,dx$

29. $\int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{1}{3}\theta\right) d\theta$

30. $\int_{\pi/4}^{5\pi/8} \cos 2x\,dx$

31. $\int_0^{\pi/6} \sec^2\left(3t - \frac{\pi}{6}\right) dt$

32. $\int_0^{\pi/6} \sec\theta \tan\theta\,d\theta$

33. $\int_{\pi/20}^{\pi/10} \csc 5x \cot 5x\,dx$

34. $\int_{\pi/28}^{\pi/14} \csc^2 7y\,dy$

En los problemas 35-40, exprese la integral como suma de dos integrales sin los valores absolutos y resuelva.

35. $\int_{-2}^1 |x|\,dx$

36. $\int_0^5 |3 - x|\,dx$

37. $\int_{-2}^3 |x^3|\,dx$

38. $\int_0^3 |x^2 - 1|\,dx$

39. $\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx$

40. $\int_0^5 |x^2 - 4x + 3|\,dx$

En los problemas 41-44, resuelva la integral en términos de las constantes.

41. $\int_b^1 x^3\,dx$

42. $\int_b^a x^4\,dx$

43. $\int_1^b x^5\,dx$

44. $\int_{-x}^{x} (t^3 + t)\,dt$

45. Sea $f(x) = \begin{cases} 12 - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x^3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$. Calcule $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$.

46. Sea $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \le \pi \\ \cos x - \operatorname{sen} 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$. Calcule $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

47. Aplique la 1ª parte del TFC para probar que $\int_{-1}^{1} x^n\,dx = 0$ si n es impar. Ilustre gráficamente el razonamiento.

48. SAC Represente gráficamente la función $f(x) = \operatorname{sen} 3x - x$. Determine el cero o raíz positiva de $f(x)$ con tres decimales de precisión y utilice este valor para hallar el área bajo la gráfica de $f(x)$ en el primer cuadrante.

49. Calcule $F(4)$ sabiendo que $F(1) = 3$ y que $F'(x) = x^2$. *Indicación:* Exprese $F(4) - F(1)$ como una integral definida.

50. Calcule $G(16)$ sabiendo que $dG/dt = t^{-1/2}$ y $G(9) = -5$.

51. Si se incrementa n, el valor de $\int_0^1 x^n\,dx$ ¿aumenta o disminuye? Ilustre gráficamente el razonamiento.

52. Demuestre que el área del arco parabólico de la figura 7 es igual a cuatro tercios del área del triángulo mostrado en la misma figura.

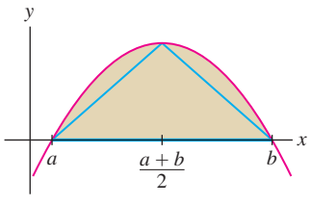


FIGURA 7 Gráfica de $y = (x - a)(b - x)$.

Problemas avanzados

53. En este problema se demuestra un conocido resultado de Arquímedes (que generaliza el problema 52). Formalmente este resultado establece que si $r < s$, el área de la región sombreada en la figura 8 es igual a cuatro tercios del área del triángulo $\triangle ACE$, donde C es el punto de la parábola para el que su recta tangente es paralela a la recta secante $\overline{AE}$. Para demostrar el resultado, se pide:

(a) Pruebe que C tiene $(r + s)/2$ por abcisa.

(b) Pruebe que $ABDE$ tiene área $(s - r)^3/4$, entendiéndolo como un paralelogramo de altura $s - r$ y base igual a la longitud de $\overline{CF}$.

(c) Demuestre que $\triangle ACE$ tiene área igual a $(s - r)^3/8$, pues tiene la misma base y altura que el paralelogramo.

(d) Obtenga el área sombreada como el área por debajo de la gráfica menos el área de un trapecio y obtenga, a continuación, el resultado de Arquímedes.

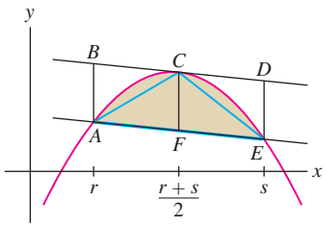


FIGURA 8 Gráfica de $f(x) = (x - a)(b - x)$.

54. (a) Aplique el teorema de comparación (teorema 5 en la sección 5.2) a la desigualdad $\operatorname{sen} x \le x$ (válida si $x \ge 0$) para demostrar que:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1$$

(b) Aplique de nuevo el mismo teorema para demostrar que:

$$x - \frac{x^3}{6} \le \operatorname{sen} x \le x \quad (\text{para } x \ge 0)$$

(c) Verifique que estas desigualdades son ciertas para $x = 0{,}3$.

55. Aplique el método del problema 54 para demostrar que:

$$1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$x - \frac{x^3}{6} \le \operatorname{sen} x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad (\text{para } x \ge 0)$$

Verifique que estas desigualdades son ciertas para $x = 0{,}1$. ¿Por qué se ha especificado $x \ge 0$ para $\operatorname{sen} x$ pero no para $\cos x$?

56. Aplique integración sobre los resultados para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ del problema 55, y obtenga el siguiente par de desigualdades. ¿Cuál será el patrón general?

57. Aplique el TFC (1ª parte) para demostrar que si $|f'(x)| \le K$ para $x \in [a, b]$, entonces $|f(x) - f(a)| \le K|x - a|$ para $x \in [a, b]$.

58. (a) Aplique el problema 57 para demostrar que se cumple la desigualdad $|\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b| \le |a - b|$ para todo a y b.

(b) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x + a) - \operatorname{sen} x$. En base al resultado obtenido en el apartado (a), pruebe que la gráfica de $f(x)$ se encuentra entre las rectas horizontales $y = \pm a$.

(c) GU Verifique el apartado (b), representando gráficamente $f(x)$ y las rectas $y = \pm a$ para $a = 0{,}5$ y $a = 0{,}2$.

5.4 El teorema fundamental del cálculo (TFC), 2ª parte

La 1ª parte del teorema fundamental del cálculo establece que se pueden utilizar primitivas para el cálculo del integrales definidas. La 2ª parte expresa la otra dirección de esta relación: se pueden utilizar integrales definidas para *construir* primitivas.

Para enunciar la 2ª parte del teorema, se introduce la **función de área** de f con límite inferior a:

*En ocasiones se denomina $A(x)$ la función **área acumulada**. En la definición de $A(x)$, se utiliza t como la variable de integración para evitar confusión con x, que es el límite superior de integración. En realidad, t es una variable muda que puede ser reemplazada por cualquier otra variable.*

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt = \text{área con signo desde } a \text{ hasta } x$$

En esencia, se va a convertir la integral definida en una función, tratando el límite superior x como una variable (figura 1). Cabe mencionar que $A(a) = 0$ pues $A(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

En algunas situaciones, se puede hallar una expresión explícita para $A(x)$ [figura 2].

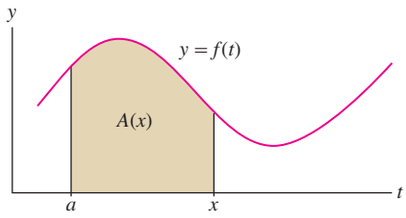


FIGURA 1 $A(x)$ es el área por debajo de la gráfica desde a hasta x.

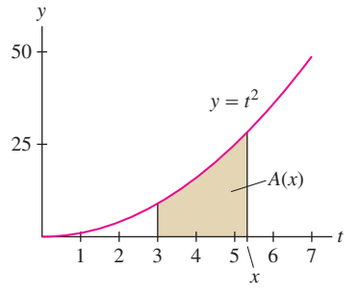


FIGURA 2 El área por debajo de $y = t^2$ desde 3 hasta x es $A(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9$.

■ **EJEMPLO 1** Halle una expresión para la función área $A(x) = \int_3^x t^2\,dt$.

Solución La función $F(t) = \frac{1}{3}t^3$ es una primitiva de $f(t) = t^2$. Según el TFC (1ª parte),

$$A(x) = \int_3^x t^2\,dt = F(x) - F(3) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}\cdot 3^3 = \frac{1}{3}x^3 - 9$$ ■

En el ejemplo previo, cabe observar que *la derivada de $A(x)$ es $f(x)$:*

$$A'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3 - 9\right) = x^2$$

La 2ª parte del TFC establece que esta relación siempre es cierta: la derivada de la función área es igual a la función original.

TEOREMA 1 El teorema fundamental del cálculo, 2ª parte Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Entonces, la función área

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es una primitiva de $f(x)$ en I, es decir, $A'(x) = f(x)$. Equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Además, $A(x)$ cumple la condición inicial $A(a) = 0$.

Demostración En primer lugar, utilizaremos la propiedad de aditividad de la integral definida para expresar la variación de $A(x)$ en el intervalo $[x, x+h]$ como una integral:

$$A(x+h) - A(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

En otras palabras, $A(x+h) - A(x)$ es igual al área que se muestra en en la figura 3, correspondiente a la sección limitada por la gráfica y el eje t, desde x hasta $x+h$.

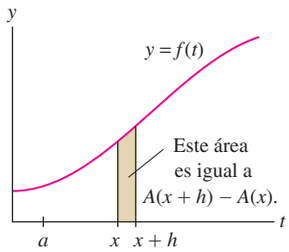


FIGURA 3 El área de la sección es igual a $A(x+h) - A(x)$.

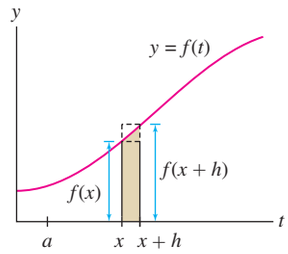


FIGURA 4 La sección sombreada se encuentra entre los rectángulos de alturas $f(x)$ y $f(x+h)$.

En esta demostración,

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$A(x+h) - A(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Para simplificar el resto de la demostración, se supondrá que $f(x)$ es estrictamente creciente (ver el problema 50 para la situación general). Entonces, si $h > 0$, esta sección se encuentra entre los dos rectángulos de alturas $f(x)$ y $f(x+h)$ que se muestran en la figura 4,

$$\underbrace{hf(x)}_{\text{Área del menor rectángulo}} \le \underbrace{A(x+h) - A(x)}_{\text{Área de la sección}} \le \underbrace{hf(x+h)}_{\text{Área del mayor rectángulo}}$$

Dividiendo por h:

$$f(x) \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le f(x+h)$$

Como $\lim_{h\to 0+} f(x+h) = f(x)$, pues $f(x)$ es continua, y $\lim_{h\to 0+} f(x) = f(x)$, según el principio de intercalación,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) \qquad \boxed{1}$$

Razonando de forma análoga, se tiene que para $h < 0$,

$$f(x+h) \le \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \le f(x)$$

De nuevo, según el principio de intercalación,

$$\lim_{h\to 0-} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x) \qquad \boxed{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) prueban que $A'(x)$ existe y que $A'(x) = f(x)$. ■

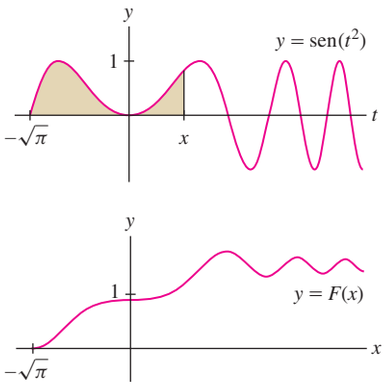


FIGURA 5 Gráfico de una simulación por ordenador de $F(x) = \int_{-\sqrt{\pi}}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\,dt$.

UN APUNTE CONCEPTUAL Muchas aplicaciones (en ciencias, ingeniería y estadística) involucran funciones para las que no se dispone de una expresión explícita. Sin embargo, a menudo se puede expresar estas funciones como integrales definidas (o como series). Esto permite calcular sus valores numéricamente y obtener gráficos mediante un sistema de álgebra computacional. La figura 5 muestra el gráfico de una primitiva de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, para la que no se dispone de una expresión explícita pero que ha sido simulada por ordenador.

EJEMPLO 2 La primitiva como una integral Sea $F(x)$ una primitiva particular de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, tal que $F(-\sqrt{\pi}) = 0$. Exprese $F(x)$ como una integral.

Solución Según la 2ª parte del TFC, la función área con límite inferior $a = -\sqrt{\pi}$ es una primitiva cumpliendo $F(-\sqrt{\pi}) = 0$:

$$F(x) = \int_{-\sqrt{\pi}}^{x} \operatorname{sen}(t^2)\, dt$$

EJEMPLO 3 Derivación de una integral Halle la derivada de:

$$A(x) = \int_{2}^{x} \sqrt{1 + t^3}\, dt$$

y calcule $A'(2)$, $A'(3)$ y $A(2)$.

Solución Por el TFC (2ª parte), $A'(x) = \sqrt{1 + x^3}$. En particular,

$$A'(2) = \sqrt{1 + 2^3} = 3 \qquad \text{y} \qquad A'(3) = \sqrt{1 + 3^3} = \sqrt{28}$$

Por otra parte, $A(2) = \displaystyle\int_{2}^{2} \sqrt{1 + t^3}\, dt = 0$.

UN APUNTE CONCEPTUAL El TFC muestra como la integración y la diferenciación son *operaciones inversas*. Por el TFC (2ª parte), partiendo de una función continua $f(x)$ y considerando la integral $\int_a^x f(x)\, dx$, se puede obtener la función original derivando:

$$f(x) \xrightarrow{\text{Integrar}} \int_a^x f(t)\, dt \xrightarrow{\text{Derivar}} \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Por otra parte, según el TFC (1ª parte), si se deriva primero e integra después también se recupera la función $f(x)$ [salvo por una constante $f(a)$]:

$$f(x) \xrightarrow{\text{Derivar}} f'(x) \xrightarrow{\text{Integrar}} \int_a^x f'(t)\, dt = f(x) - f(a)$$

Cuando el límite superior de la integral sea una *función* de x, en lugar de x, se utilizará la 2ª parte del TFC junto con la regla de la cadena para derivar la integral.

EJEMPLO 4 El TFC y la regla de la cadena Halle la derivada de:

$$G(x) = \int_{-2}^{x^2} \operatorname{sen} t\, dt$$

Solución No se puede aplicar directamente la 2ª parte del TFC porque el límite superior de la integral es x^2 en lugar de x. Es necesario identificar $G(x)$ como una *función compuesta* de función exterior $A(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} \operatorname{sen} t\, dt$:

$$G(x) = A(x^2) = \int_{-2}^{x^2} \operatorname{sen} t\, dt$$

Por la 2ª parte del TFC $A'(x) = \operatorname{sen} x$. En consecuencia, aplicando la regla de la cadena,

$$G'(x) = A'(x^2) \cdot (x^2)' = \operatorname{sen}(x^2) \cdot (2x) = 2x \operatorname{sen}(x^2)$$

De manera alternativa, se puede introducir $u = x^2$ y aplicar la regla de la cadena según se muestra a continuación:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{-2}^{x^2} \operatorname{sen} t\, dt = \left(\frac{d}{du}\int_{-2}^{u} \operatorname{sen} t\, dt\right)\frac{du}{dx} = (\operatorname{sen} u)2x = 2x \operatorname{sen}(x^2)$$

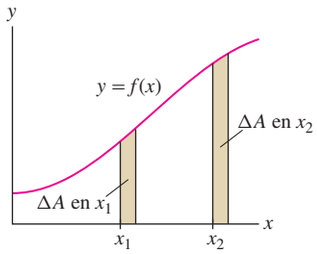


FIGURA 6 La variación en el área ΔA, para Δx fijado, es mayor si $f(x)$ es mayor.

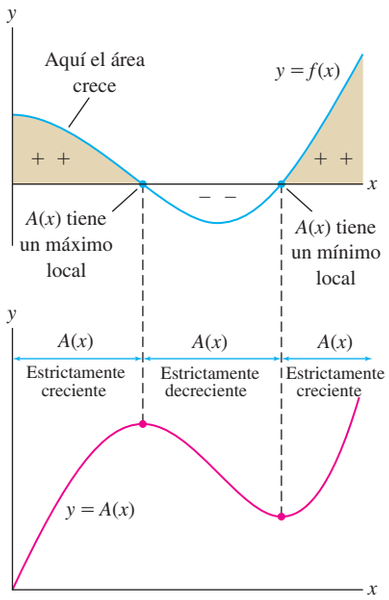


FIGURA 7 El signo de $f(x)$ determina el comportamiento creciente/decreciente de $A(x)$.

UN APUNTE GRÁFICO Otro estudio de dos gráficos Según el TFC (2ª parte) $A'(x) = f(x)$ o, en otras palabras, $f(x)$ es la tasa de variación de $A(x)$. Aunque no supiéramos este resultado, podríamos intuirlo al comparar las gráficas de $A(x)$ y de $f(x)$. Observemos que:

- En la figura 6 se muestra como el incremento en el área ΔA para un Δx fijado es superior en x_2 que en x_1 por ser $f(x_2) > f(x_1)$. Por tanto, la magnitud de $f(x)$ determina lo rápido que $A(x)$ cambia, tal y como cabría esperar si $A'(x) = f(x)$.
- En la figura 7 se muestra como el signo de $f(x)$ determina si $A(x)$ es estrictamente creciente o decreciente. Si $f(x) > 0$, entonces $A(x)$ es estrictamente creciente, pues al realizar un desplazamiento hacia la derecha, se añade área positiva. Cuando $f(x)$ se vuelve negativa, $A(x)$ empieza a decrecer, porque se añade área negativa.
- $A(x)$ presenta un máximo local en los puntos en los que $f(x)$ cambia de signo + a − (los puntos a partir de los que el área empieza a ser negativa) y presenta un mínimo local en aquellos puntos en los que $f(x)$ cambia de − a +. Esto concuerda con el test de la primera derivada.

Los comentarios anteriores muestran que $f(x)$ "se comporta" como $A'(x)$, tal y como se establece en el TFC (2ª parte).

5.4 RESUMEN

- La *función área* de límite inferior a: $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Cumple $A(a) = 0$.
- TFC (2ª parte): $A'(x) = f(x)$ o, equivalentemente, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$.
- El TFC (2ª parte) establece que toda función continua tiene una primitiva, precisamente su función área (con cualquier límite inferior).
- Para derivar la función $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt$, exprese $G(x) = A(g(x))$ siendo $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. A continuación, aplique la regla de la cadena:

$$G'(x) = A'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

5.4 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Sea $G(x) = \int_4^x \sqrt{t^3+1}\,dt$.

(a) ¿Se necesita el TFC para calcular $G(4)$?

(b) ¿Se necesita el TFC para calcular $G'(4)$?

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones es una primitiva $F(x)$ de $f(x) = x^2$ cumpliendo $F(2) = 0$?

(a) $\int_2^x 2t\,dt$ **(b)** $\int_0^2 t^2\,dt$ **(c)** $\int_2^x t^2\,dt$

3. Toda función continua, ¿tiene primitiva? Justifique la respuesta.

4. Sea $G(x) = \int_4^{x^3} \operatorname{sen} t\,dt$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones es correcta?

(a) $G(x)$ es igual a la función compuesta $\operatorname{sen}(x^3)$.

(b) $G(x)$ es igual a la función compuesta $A(x^3)$, donde:

$$A(x) = \int_4^x \operatorname{sen}(t)\,dt$$

(c) $G(x)$ es demasiado complicada para poder ser derivada.

(d) Para derivar $G(x)$ se aplica la regla del producto.

(e) Para derivar $G(x)$ se aplica la regla de la cadena.

(f) $G'(x) = 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)$.

Problemas

1. Exprese la función área de $f(x) = 2x + 4$ con límite inferior $a = -2$ como una integral y halle una expresión para ésta.

2. Halle una expresión para la función área de $f(x) = 2x + 4$ con límite inferior $a = 0$.

3. Sea $G(x) = \int_1^x (t^2 - 2)\,dt$. Calcule $G(1)$, $G'(1)$ y $G'(2)$. A continuación halle una expresión para $G(x)$.

4. Halle $F(0)$, $F'(0)$ y $F'(3)$ para $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2 + t}\,dt$.

5. Halle $G(1)$, $G'(0)$ y $G'(\pi/4)$ para $G(x) = \displaystyle\int_1^x \tan t\,dt$.

6. Halle $H(-2)$ y $H'(-2)$ para $H(x) = \displaystyle\int_{-2}^x \frac{du}{u^2 + 1}$.

En los problemas 7-16, halle expresiones explícitas para las funciones representadas mediante las integrales.

7. $\displaystyle\int_2^x u^4\,du$

8. $\displaystyle\int_2^x (12t^2 - 8t)\,dt$

9. $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} u\,du$

10. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^x \sec^2\theta\,d\theta$

11. $\displaystyle\int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t^2}$

12. $\displaystyle\int_{\operatorname{sen}\theta}^4 (5t + 9)\,dt$

13. $\displaystyle\int_1^{x^2} t\,dt$

14. $\displaystyle\int_{x/2}^{x/4} \sec^2 u\,du$

15. $\displaystyle\int_{3\sqrt{x}}^{x^{3/2}} t^3\,dt$

16. $\displaystyle\int_{-2x}^x \sec^2 t\,dt$

En los problemas 17-20, exprese la primitiva $F(x)$ de $f(x)$, cumpliendo la condición inicial, como una integral.

17. $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}, \quad F(5) = 0$

18. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 9}, \quad F(7) = 0$

19. $f(x) = \sec x, \quad F(0) = 0$

20. $f(\theta) = \operatorname{sen}(\theta^3), \quad F(-\pi) = 0$

En los problemas 21-24, calcule la derivada.

21. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x (t^5 - 9t^3)\,dt$

22. $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\int_1^\theta \cot u\,du$

23. $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_{100}^t \sec(5x - 9)\,dx$

24. $\displaystyle\frac{d}{ds}\int_{-2}^s \tan\left(\frac{1}{1 + u^2}\right)du$

25. Sea $f(x)$ la función de la figura 8 y $A(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Calcule $A(2)$, $A(3)$, $A'(2)$ y $A'(3)$.

(b) Halle fórmulas para $A(x)$ en $[0, 2]$ y en $[2, 4]$ y dibuje la gráfica de $A(x)$.

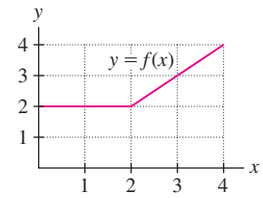


FIGURA 8

26. Sea $g(x)$ la función de la figura 9. Represente, de forma aproximada, la gráfica de $A(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$.

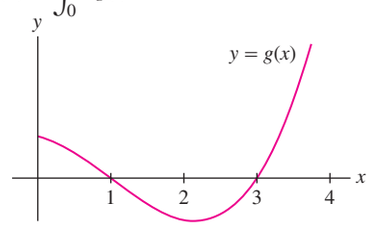


FIGURA 9

27. Verifique que $\displaystyle\int_0^x |t|\,dt = \frac{1}{2}x|x|$. *Indicación:* Considere por separado los casos $x \geq 0$ y $x \leq 0$.

28. Halle $G'(1)$ para $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{t^3 + 3}\,dt$.

En los problemas 29-34, calcule la derivada.

29. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \frac{t\,dt}{t + 1}$

30. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_1^{1/x} \cos^3 t\,dt$

31. $\displaystyle\frac{d}{ds}\int_{-6}^{\cos s} u^4\,du$

32. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^4} \sqrt{t}\,dt$

Indicación para el problema 32: $F(x) = A(x^4) - A(x^2)$.

33. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \tan t\,dt$

34. $\displaystyle\frac{d}{du}\int_{-u}^{3u} \sqrt{x^2 + 1}\,dx$

En los problemas 35-38, sea $f(x)$ la función dada por la figura 10. Introducimos,

$$A(x) = \int_0^x f(t)\,dt \qquad y \qquad B(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

35. Halle el mínimo y el máximo de $A(x)$ en $[0, 6]$.

36. Halle el mínimo y el máximo de $B(x)$ en $[0, 6]$.

37. Halle expresiones para $A(x)$ y $B(x)$, válidas sobre $[2, 4]$.

38. Halle expresiones para $A(x)$ y $B(x)$, válidas sobre $[4, 5]$.

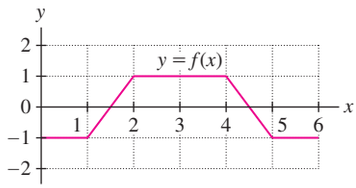


FIGURA 10

39. Sea $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, para $f(x)$ dada por la figura 11.

(a) ¿Tiene $A(x)$ un máximo relativo en P?

(b) ¿En qué punto presenta $A(x)$ un mínimo relativo?

(c) ¿En qué punto presenta $A(x)$ un máximo relativo?

(d) ¿Verdadero o falso? $A(x) < 0$ para todo x en el intervalo considerado.

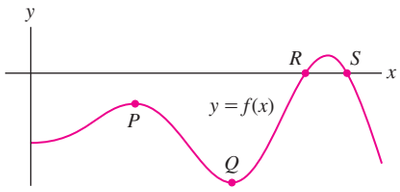


FIGURA 11 Gráfica de $f(x)$.

40. Determine $f(x)$ sabiendo que $\int_0^x f(t)\,dt = x^2 + x$.

41. Determine la función $g(x)$ y todos los valores de c tales que

$$\int_c^x g(t)\,dt = x^2 + x - 6$$

42. Halle $a \le b$ tales que $\int_a^b (x^2 - 9)\,dx$ sea mínima.

En los problemas 43-44, sea $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

43. **La función área y la concavidad** Justifique por qué las siguientes afirmaciones son ciertas. Sea $f(x)$ una función derivable.

(a) Si c es un punto de inflexión de $A(x)$, entonces $f'(c) = 0$.

(b) $A(x)$ es convexa si $f(x)$ es estrictamente creciente.

(c) $A(x)$ es cóncava si $f(x)$ es estrictamente decreciente.

44. Relacione la propiedad de $A(x)$ con la correspondiente propiedad de la gráfica de $f(x)$. Suponga que $f(x)$ es derivable.

Función área $A(x)$

(a) $A(x)$ es estrictamente decreciente.

(b) $A(x)$ tiene un máximo relativo.

(c) $A(x)$ es convexa.

(d) $A(x)$ pasa de ser convexa a cóncava.

Gráfica de $A(x)$

(i) Se encuentra por debajo del eje x.

(ii) Cruza el eje x desde los valores positivos hacia los negativos.

(iii) Tiene un máximo relativo.

(iv) $f(x)$ es estrictamente creciente.

45. Sea $f(x)$ la función dada por la figura 12 y $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Determine:

(a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento estrictos de $A(x)$.

(b) Los valores x para los que $A(x)$ alcanza un máximo o un mínimo relativo.

(c) Los puntos de inflexión de $A(x)$.

(d) Los intervalos de convexidad y de concavidad de $A(x)$.

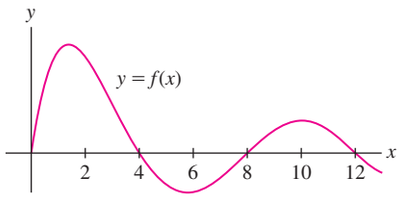


FIGURA 12

46. Sean $f(x) = x^2 - 5x - 6$ y $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

(a) Halle los puntos estacionarios de $F(x)$ y determine si son máximos o mínimos relativos.

(b) Halle los puntos de inflexión de $F(x)$ y determine si el cambio que se produce en éstos es de convexidad a concavidad o a la inversa.

(c) GU Represente gráficamente $f(x)$ y $F(x)$, utilizando los mismos ejes, y confirme las respuestas de los apartados (a) y (b).

47. Dibuje la gráfica de una función estrictamente creciente $f(x)$, para la que tanto $f'(x)$ como $A(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ sean decrecientes.

48. La figura 13 muestra la gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Sea $F(x) = \int_0^x t \operatorname{sen} t\,dt$.

(a) Localice el máximo absoluto y el máximo relativo de $F(x)$ en $[0, 3\pi]$.

(b) Justifique gráficamente: $F(x)$ tiene exactamente una raíz en $[\pi, 2\pi]$.

(c) ¿Cuántas raíces tiene $F(x)$ en $[0, 3\pi]$?

(d) Halle los puntos de inflexión de $F(x)$ en $[0, 3\pi]$. Para cada uno de ellos, determine si el cambio es de convexidad a concavidad o a la inversa.

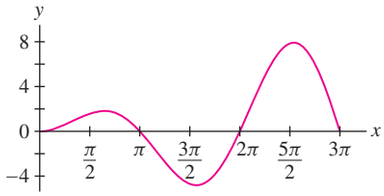


FIGURA 13 Gráfica de $f(x) = x \operatorname{sen} x$.

49. GU Halle el menor de los puntos estacionarios positivos de

$$F(x) = \int_0^x \cos(t^{3/2})\,dt$$

y determine si se trata de un máximo o de un mínimo relativo. A continuación, halle el menor de los puntos de inflexión positivos de $F(x)$ y, en base a la gráfica de $y = \cos(x^{3/2})$, determine si el cambio que se produce es de convexidad a concavidad o a la inversa.

Problemas avanzados

50. Demostración del TFC (2ª parte) En la demostración facilitada en el libro se supone que $f(x)$ es estrictamente creciente. Para demostrar este resultado para cualquier función continua, sean $m(h)$ y $M(h)$ el *mínimo* y el *máximo* de $f(t)$ en $[x, x+h]$ (figura 14). La continuidad de $f(x)$ implica que $\lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} M(h) = f(x)$.

Demuestre que para cualquier $h > 0$,

$$hm(h) \le A(x+h) - A(x) \le hM(h)$$

Para $h < 0$, las desigualdades cambian de sentido. Demuestre que $A'(x) = f(x)$.

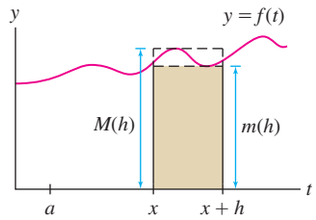


FIGURA 14 Interpretación gráfica de $A(x+h) - A(x)$.

51. Demostración del TFC (1ª parte) En la 1ª parte del TFC se establece que $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ si $F'(x) = f(x)$. Aplique la 2ª parte del TFC para obtener una nueva demostración, según se indica a continuación. Sea $A(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

(a) Demuestre que $F(x) = A(x) + C$, para alguna constante C.

(b) Demuestre que $F(b) - F(a) = A(b) - A(a) = \int_a^b f(t)\,dt$.

52. ¿Se puede expresar cualquier primitiva como una integral? La función área $\int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de $f(x)$, para cualquier valor de a. Sin embargo, no toda primitiva se obtiene de esta forma. La primitiva general de $f(x) = x$ es $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$. Demuestre que $F(x)$ es una función área si $C \le 0$, pero no si $C > 0$.

53. Demuestre la fórmula:

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

54. Aplique el resultado del problema 53 para calcular:

$$\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{e^x} \operatorname{sen} t\,dt$$

5.5 Variación neta como la integral de una tasa

De momento nos hemos centrado en la interpretación de la integral como un área. En esta sección, se utilizará la integral para calcular la variación neta.

Consideremos el siguiente problema: sea $r(t)$ la razón a la que se llena de agua un cubo vacío, medida en litros por segundo. ¿Qué cantidad de agua contiene el cubo después de 4 segundos? Si la tasa de flujo de agua fuese *constante* (por ejemplo, 1,5 litros/segundo)

$$\text{Cantidad de agua} = \text{tasa de flujo} \times \text{tiempo transcurrido} = 1{,}5 \cdot 4 = 6 \text{ litros}$$

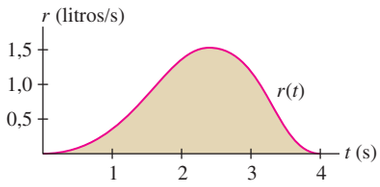


FIGURA 1 La cantidad de agua en el cubo es igual al área bajo la gráfica de la razón de flujo $r(t)$.

Sin embargo, cabe suponer que la tasa de flujo $r(t)$ varía, como en la figura 1. Entonces, *la cantidad de agua es igual al área por debajo de la gráfica de* $r(t)$. Para demostrarlo, sea $s(t)$ la cantidad de agua en el cubo en el momento t. Entonces, $s'(t) = r(t)$ porque $s'(t)$ es la tasa de variación de la cantidad de agua. Además, $s(0) = 0$ pues el cubo está inicialmente vacío. Según la 1ª parte del TFC,

$$\underbrace{\int_0^4 s'(t)\,dt}_{\substack{\text{Área bajo la gráfica}\\ \text{de la razón de flujo}}} = s(4) - s(0) = \underbrace{s(4)}_{\substack{\text{Agua en el cubo}\\ \text{en } t = 4}}$$

De manera más general, $s(t_2) - s(t_1)$ es la **variación neta** de $s(t)$ a lo largo del intervalo $[t_1, t_2]$. La 1ª parte del TFC da lugar al siguiente resultado.

En el teorema 1, la variable t no tiene por qué ser necesariamente una variable temporal.

TEOREMA 1 Variación neta como la integral de una tasa La variación neta en $s(t)$ a lo largo de un intervalo $[t_1, t_2]$ viene dada por la integral

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt}_{\text{Integral de la tasa de variación}} = \underbrace{s(t_2) - s(t_1)}_{\text{Variación neta a lo largo de } [t_1, t_2]}$$

EJEMPLO 1 Un depósito pierde agua a razón de $2+5t$ litros/hora, donde t es el número de horas transcurridas a partir de las 7 AM. ¿Cuánta agua se ha perdido entre las 9 y las 11 de la mañana?

Solución Sea $s(t)$ la cantidad de agua en el tanque en el momento t. Entonces $s'(t) = -(2+5t)$, donde el signo menos es debido a que $s(t)$ es decreciente. Como las 9 y las 11 de la mañana corresponden a $t = 2$ y $t = 4$ respectivamente, la variación neta en $s(t)$ entre las 9 y las 11 de la mañana es:

$$s(4) - s(2) = \int_2^4 s'(t)\,dt = -\int_2^4 (2+5t)\,dt =$$

$$= -\left(2t + \frac{5}{2}t^2\right)\Big|_2^4 = (-48) - (-14) = -34 \text{ litros}$$

El tanque ha perdido 34 litros entre las 9 y las 11 de la mañana.

En el siguiente ejemplo, se estimará el valor de una integral mediante la evaluación de la función en diferentes puntos. Se calculará la media de las aproximaciones en base a los extremos inferior y superior, porque esta media suele conducir a una aproximación más precisa que la que se obtendría con cualquiera de las aproximaciones basadas sólo en uno de los extremos. (En la sección 8.8, nos referiremos a esta media como la aproximación trapezoidal.)

EJEMPLO 2 Volumen de circulación El número de vehículos por hora que pasan a través de un punto de observación de la carretera por unidad de tiempo se denomina razón del volumen de tráfico o intensidad de circulación $q(t)$ (en coches por hora).

(a) ¿Qué cantidad representa la integral $\int_{t_1}^{t_2} q(t)\,dt$?

(b) Se registra la intensidad de circulación, a intervalos de 15 minutos entre las 7:00 y las 9:00 de la mañana. Estime el número total de vehículos que han utilizado la carretera en algún momento de ese periodo de dos horas.

t	7:00	7:15	7:30	7:45	8:00	8:15	8:30	8:45	9:00
$q(t)$	1044	1297	1478	1844	1451	1378	1155	802	542

Solución

(a) La integral $\int_{t_1}^{t_2} q(t)\,dt$ representa el número total de vehículos que han pasado por el punto de observación en el periodo de tiempo $[t_1, t_2]$.

(b) Los valores numéricos se han registrado a intervalos de $\Delta t = 0{,}25$ horas. Por tanto:

$$L_N = 0{,}25\big(1044 + 1297 + 1478 + 1844 + 1451 + 1378 + 1155 + 802\big) \approx$$
$$\approx 2612$$

$$R_N = 0{,}25\big(1297 + 1478 + 1844 + 1451 + 1378 + 1155 + 802 + 542\big) \approx$$
$$\approx 2487$$

En el ejemplo 2, L_N se obtiene mediante la suma de los valores de $q(t)$ en los extremos inferiores:

7:00, 7:15, . . . , 8:45

R_N se obtiene mediante la suma de los valores de $q(t)$ en los extremos superiores:

7:15, . . . , 8:45, 9:00

El número de vehículos que han pasado por el punto de observación entre las 7 y las 9 de la mañana se estima como la media de R_N y L_N:

$$\int_7^9 q(t)\,dt \approx \frac{1}{2}(R_N + L_N) = \frac{1}{2}(2612 + 2487) \approx 2550$$

Aproximadamente 2550 vehículos utilizaron la carretera entre las 7 y las 9 de la mañana.

La integral de la velocidad

Sea $s(t)$ la posición de un objeto en movimiento rectilíneo en el instante t. Entonces, la velocidad del objeto es $v(t) = s'(t)$ y la integral de $v(t)$ es igual a la *variación neta de la posición* o *desplazamiento* en un intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt = \underbrace{s(t_2) - s(t_1)}_{\text{Desplazamiento o variación neta de la posición}}$$

Se debe distinguir entre desplazamiento y *distancia recorrida*. Si se recorren 10 km y se vuelve al punto de partida, el desplazamiento es cero, pero la distancia recorrida es 20 km. Para obtener la distancia recorrida, en lugar del desplazamiento, se debe integrar la *celeridad* $|v(t)|$.

TEOREMA 2 La integral de la velocidad Para un objeto en movimiento a velocidad $v(t)$,

$$\text{Desplazamiento a lo largo de } [t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

$$\text{Distancia recorrida a lo largo de } [t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$$

EJEMPLO 3 Una partícula se desplaza a velocidad $v(t) = t^3 - 10t^2 + 24t$ m/s. Calcule:

(a) Desplazamiento en el intervalo de tiempo $[0, 6]$.

(b) La distancia total recorrida en el intervalo de tiempo $[0, 6]$.

Represente la trayectoria de la partícula mediante un diagrama de movimiento.

Solución En primer lugar, se calcula la integral indefinida:

$$\int v(t)\,dt = \int (t^3 - 10t^2 + 24t)\,dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2 + C$$

(a) El desplazamiento a lo largo del intervalo $[0, 6]$ es:

$$\int_0^6 v(t)\,dt = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2\right)\Big|_0^6 = 36 \text{ m}$$

(b) La factorización $v(t) = t(t-4)(t-6)$ pone de manifiesto que $v(t)$ cambia de signo en $t = 4$. Es positivo en $[0, 4]$ y negativo en $[4, 6]$, como se muestra en la figura 2. Por tanto, la distancia total recorrida es:

$$\int_0^6 |v(t)|\,dt = \int_0^4 v(t)\,dt - \int_4^6 v(t)\,dt$$

Evaluando estas dos integrales por separado:

$$[0, 4]: \quad \int_0^4 v(t)\,dt = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2\right)\Big|_0^4 = \frac{128}{3} \text{ m}$$

$$[4, 6]: \quad \int_4^6 v(t)\,dt = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{10}{3}t^3 + 12t^2\right)\Big|_4^6 = -\frac{20}{3} \text{ m}$$

se obtiene que la distancia total recorrida es $\frac{128}{3} + \frac{20}{3} = \frac{148}{3} = 49\frac{1}{3}$ m.

La figura 3 es una diagrama de movimiento reflejando la trayectoria de la partícula. Ésta recorre $\frac{128}{3}$ m durante los primeros 4 s y después retrocede $\frac{20}{3}$ m durante los siguientes 2 s.

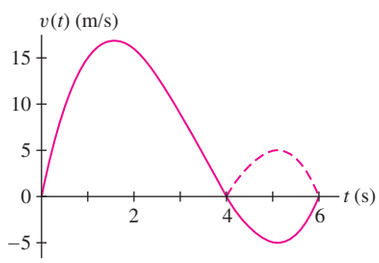


FIGURA 2 Gráfica de $v(t) = t^3 - 10t^2 + 24t$. En $[4, 6]$, la curva de trazo discontinuo es la gráfica de $|v(t)|$.

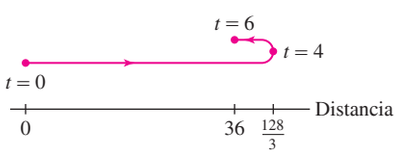


FIGURA 3 Trayectoria de la partícula a lo largo de una línea recta.

Coste total y marginal

En la sección 3.4, se definió el coste marginal para un nivel de producción x_0 como el coste:

$$C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

de producir una unidad adicional. Como este coste marginal se aproxima por la derivada $C'(x_0)$, a menudo nos solemos referir a $C'(x)$ como el coste marginal también.

Sea $C(x)$ la función de coste de un fabricante, es decir, el coste en euros de producir x unidades de un cierto producto o mercancía. La derivada $C'(x)$ se denomina **coste marginal**. El coste de aumentar la producción de a a b es la variación neta $C(b) - C(a)$, que a su vez es igual a la integral del coste marginal:

$$\text{Coste de aumentar la producción de } a \text{ a } b = \int_a^b C'(x)\,dx$$

■ **EJEMPLO 4** El coste marginal de producir x chips de ordenador (en unidades de mil) es $C'(x) = 300x^2 - 4000x + 40\ 000$ (euros por miles de chips).

(a) Halle el coste de aumentar la producción de 10 000 a 15 000 chips.

(b) Obtenga el coste total de producir 15 000 chips, suponiendo que poner en funcionamiento la fábrica cuesta 30 000 euros [es decir, $C(0) = 30\ 000$].

Solución

(a) El coste de aumentar la producción de 10 000 ($x = 10$) a 15 000 ($x = 15$) es:

$$C(15) - C(10) = \int_{10}^{15} (300x^2 - 4000x + 40\ 000)\,dx =$$

$$= (100x^3 - 2000x^2 + 40\ 000x)\Big|_{10}^{15} =$$

$$= 487\ 500 - 300\ 000 = 187\ 500\,€$$

(b) El coste de aumentar la producción de 0 a 15 000 chips es:

$$C(15) - C(0) = \int_0^{15} (300x^2 - 4000x + 40\ 000)\,dx =$$

$$= (100x^3 - 2000x^2 + 40\ 000x)\Big|_0^{15} = 487\ 500\,€$$

El coste total de producir 15 000 chips debe incluir los costes iniciales de 30 000 €:

$$C(15) = C(0) + 487\ 500 = 30\ 000 + 487\ 500 = 517\ 500\,€$$

■

5.5 RESUMEN

- Muchas aplicaciones están basadas en el siguiente principio: *La variación neta en una cantidad $s(t)$ es igual a la integral de su tasa de variación:*

$$\underbrace{s(t_2) - s(t_1)}_{\text{Variación neta en } [t_1, t_2]} = \int_{t_1}^{t_2} s'(t)\,dt$$

- Para un objeto que se mueve en línea recta a velocidad $v(t)$,

$$\text{Desplazamiento a lo largo de } [t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

$$\text{Distancia total recorrida a lo largo de } [t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt$$

- Si $C(x)$ es el coste de producir x unidades de un cierto bien, entonces $C'(x)$ es el coste marginal y

$$\text{Coste de aumentar la producción de } a \text{ a } b = \int_a^b C'(x)\,dx$$

5.5 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. Se sumerge en agua un objeto de metal caliente. La razón de refrigeración del objeto (en grados por minuto) es una función $f(t)$ del tiempo. ¿Qué cantidad representa la integral $\int_0^T f(t)\,dt$?

2. Un avión recorre 560 km desde Los Ángeles hasta San Francisco en 1 hora. Si la velocidad del avión en el instante t es $v(t)$ km/h, ¿qué valor tiene $\int_0^1 v(t)\,dt$?

3. ¿Qué cantidades se representarían, de forma natural, mediante derivadas y qué cantidades mediante integrales?

(a) Velocidad de un tren.

(b) Precipitación de lluvia durante un periodo de 6 meses.

(c) Kilómetros por galón recorridos por un vehículo.

(d) Aumento de la población de EE.UU. desde 1990 hasta 2010.

Problemas

1. Un embalse se llena de agua a razón de $3000 + 20t$ litros por hora. ¿Cuánta agua hay en el embalse al cabo de 5 horas?

2. Una población de insectos aumenta a razón de $200 + 10t + 0{,}25t^2$ insectos por día. Halle la población de insectos al cabo de 3 días, suponiendo que hay 35 insectos en $t = 0$.

3. Según una encuesta, la candidata a una cierta alcaldía está ganando votantes a razón de $2000t + 1000$ votos por día, donde t es el número de días desde que anunció su candidatura. Pasados 60 días, ¿cuántos partidarios tendrá la candidata, suponiendo que en $t = 0$ no tenía ninguno?

4. En una fábrica se producen bicicletas a razón de $95+3t^2-t$ unidades por semana. ¿Cuántas bicicletas se han fabricado desde el principio de la semana 2 hasta el final de la semana 3?

5. Halle el desplazamiento de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta a velocidad $v(t) = 4t - 3$ m/s en el intervalo de tiempo $[2, 5]$.

6. Halle el desplazamiento a lo largo del intervalo de tiempo $[1, 6]$ de un helicóptero cuya velocidad (vertical) en el instante t es $v(t) = 0{,}02t^2 + t$ m/s.

7. Un gato se cae de un árbol (con velocidad inicial igual a cero) en el instante $t = 0$. ¿Cuál es la distancia total que recorre el gato en su caída, desde $t = 0{,}5$ hasta $t = 1$ s? Aplique la fórmula de Galileo $v(t) = -9{,}8t$ m/s.

8. Se lanza un proyectil con velocidad (vertical) inicial de 100 m/s. Aplique la fórmula $v(t) = 100 - 9{,}8t$ de la velocidad para obtener la distancia recorrida en los primeros 15 segundos.

En los problemas 9-12, una partícula se mueve a lo largo de una línea recta a la velocidad dada (en m/s). Halle el desplazamiento y la distancia recorrida en el intervalo de tiempo, y dibuje un diagrama de movimiento como el de la figura 3 (con la distancia y etiquetas temporales).

9. $v(t) = 12 - 4t$, $[0, 5]$

10. $v(t) = 36 - 24t + 3t^2$, $[0, 10]$

11. $v(t) = t^{-2} - 1$, $[0{,}5, 2]$

12. $v(t) = \cos t$, $[0, 3\pi]$

13. Halle la variación neta de la velocidad en $[1, 4]$ para un objeto con $a(t) = 8t - t^2$ m/s^2.

14. Demuestre que si la aceleración es constante, entonces la variación en la velocidad es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo.

15. La intensidad de circulación en un cierto punto de una carretera es $q(t) = 3000+2000t-300t^2$ (t en horas), siendo $t = 0$ las 8 de la mañana. ¿Cuántos coches pasan por este punto, en el intervalo de tiempo que va desde las 8 de la mañana hasta las 10 de la mañana?

16. El coste marginal de producir x Tablet PC es $C'(x) = 120 - 0{,}06x + 0{,}00001x^2$. Si los costes iniciales son 90 000 €, ¿cuál es el coste de producir 3000 unidades? Si se ha establecido la producción en 3000 unidades, ¿cuál sería el coste de producir 200 unidades adicionales?

17. Una pequeña boutique produce suéteres con un coste marginal de $40 - 5[[x/5]]$ para $0 \le x \le 20$, siendo $[[x]]$ la función entero superior o función techo. Halle el coste de producir 20 suéteres. A continuación, calcule el coste medio de los primeros 10 suéteres y de los últimos 10.

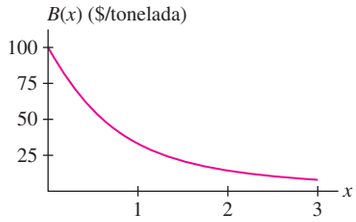
18. Se registra a intervalos de medio minuto la razón (en litros por minuto) a la que se desagua un tanque. Calcule las aproximaciones basadas en los extremos inferior y superior, para estimar la cantidad total de agua drenada durante los primeros 3 minutos.

t (min)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
r (L/min)	50	48	46	44	42	40	38

19. Se registra la velocidad de un vehículo a intervalos de medio segundo (en pies por segundo). Utilice la media de las aproximaciones basadas en los extremos inferior y superior, para estimar la distancia total recorrida durante los primeros 4 segundos.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$v(t)$	0	12	20	29	38	44	32	35	30

20. Para modelar los efectos de un **impuesto del carbono** sobre las emisiones de CO_2, los responsables políticos estudian el *coste marginal de reducción* $B(x)$, que se define como el coste de aumentar la reducción de CO_2 de x toneladas a $x + 1$ (en unidades de diez mil toneladas —figura 4). ¿Que cantidad se representa en la figura 4 mediante el área bajo la curva en $[0, 3]$?



Reducción de toneladas (en unidades de diez mil)

FIGURA 4 Coste marginal de la reducción $B(x)$.

21. Un megawatt de potencia es 10^6 W o $3{,}6 \times 10^9$ J/hora. ¿Qué cantidad se representa en la figura 5 mediante el área bajo la gráfica? Estime la energía (en joules) consumida entre las 4 y las 8 de la tarde.

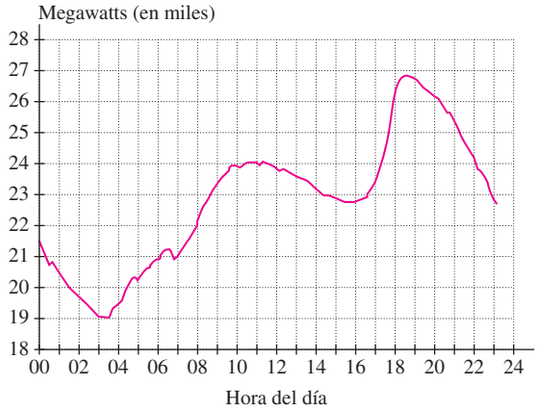


FIGURA 5 Consumo de potencia a lo largo de un periodo de 1 día en California (Febrero 2010).

22. La figura 6 muestra la tasa de migración $M(t)$ de Irlanda para el periodo 1988-1998; ésta corresponde a la razón según la cual la población (en miles por año) se muda.

(a) La siguiente integral, ¿es positiva o negativa? ¿Qué cantidad representa?

$$\int_{1988}^{1998} M(t)\,dt$$

(b) El flujo neto de población en Irlanda durante el periodo 1988-1998, ¿fue positivo o negativo?

(c) Según el primer ministro de Irlanda, "Se ha alcanzado un punto de inflexión. Todavía estamos perdiendo población pero la tendencia, en estos momentos, es hacia la recuperación." ¿En qué dos años podría haber hecho esta declaración?

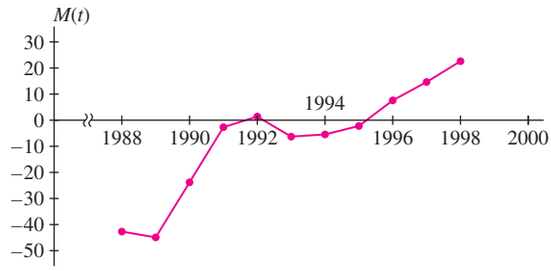


FIGURA 6 Tasa de migración irlandesa (en miles por año).

23. Sea $N(d)$ el número de asteriodes de diámetro $\leq d$ kilómetros. Los datos sugieren que los diámetros se distribuyen según una ley de potencias definida a trozos:

$$N'(d) = \begin{cases} 1{,}9 \times 10^9 d^{-2{,}3} & \text{para } d < 70 \\ 2{,}6 \times 10^{12} d^{-4} & \text{para } d \geq 70 \end{cases}$$

(a) Calcule el número de asteroides que tienen diámetro entre 0,1 y 100 km.

(b) Considerando la aproximación $N(d + 1) - N(d) \approx N'(d)$, estime el número de asteroides de diámetro igual a 50 km.

24. Capacidad calorífica La capacidad calorífica $C(T)$ de una sustancia es la cantidad de energía (en joules) que que hay que suministrar a 1 g de la sustancia para aumentar su temperatura T en 1 °C.

(a) Explique por qué la energía necesaria para aumentar la temperatura desde T_1 hasta T_2 es el área bajo la gráfica de $C(T)$ en $[T_1, T_2]$.

(b) Si $C(T) = 6 + 0{,}2\sqrt{T}$, ¿cuánta energía hay que suministrar para aumentar la temperatura desde 50 hasta 100°C?

25. La figura 7 muestra la tasa $R(t)$ de consumo de gas natural (en billones de pies cúbicos por día) en los estados del Atlántico medio de EE.UU. (New York, New Jersey, Pennsylvania). Exprese la cantidad total de gas consumida en 2009 como una integral (respecto al tiempo t en días). A continuación, estime esta cantidad en base a los siguientes valores mensuales de $R(t)$:

3,18	2,86	2,39	1,49	1,08	0,80
1,01	0,89	0,89	1,20	1,64	2,52

Recuerde que el número de días de un mes varía según el mes considerado.

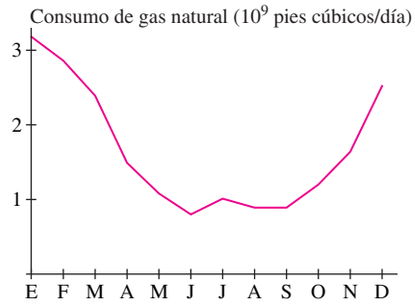


FIGURA 7 Consumo de gas natural en 2009 en los estados del Atlántico medio.

26. El gasto cardíaco es la tasa R de volumen de sangre bombeada por el corazón por unidad de tiempo (en litros por minuto). Los médicos miden R inyectando A mg de colorante en una vena que se dirija al corazón en $t = 0$ y registrando la concentración $c(t)$ de tinte (en miligramos por litro) bombeada en cortos intervalos de tiempo regulares (figura 8).

(a) Explique la siguiente afirmación: La cantidad de tinte bombeada en un corto periodo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ es aproximadamente $Rc(t)\Delta t$.

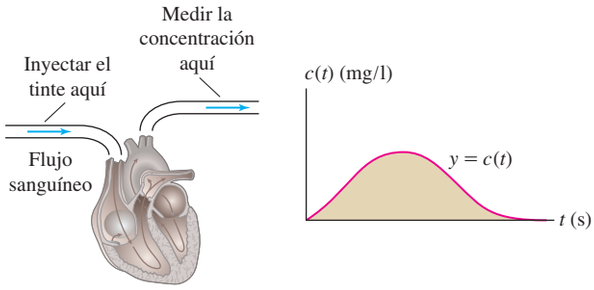


FIGURA 8

(b) Demuestre que $A = R\int_0^T c(t)\,dt$, donde T es lo suficientemente elevado para que todo el tinte sea bombeado a través del corazón, pero no tanto como para que el tinte vuelva por recirculación.

(c) Supongamos que $A = 5$ mg. Estime R mediante los siguientes valores de $c(t)$ registrados en intervalos de 1 segundo desde $t = 0$ hasta $t = 10$:

0	0,4	2,8	6,5	9,8	8,9
6,1	4	2,3	1,1	0	

Problemas 27 y 28: Un estudio sugiere que la razón de extinción $r(t)$ de las familias de animales marinos durante el eón Fanerozoico se puede modelar mediante la función $r(t) = 3130/(t + 262)$ para $0 \le t \le 544$, siendo t el tiempo transcurrido (en millones de años) desde el inicio del eón, hace 544 millones de años. De esta manera, $t = 544$ se refiere a la época actual, $t = 540$ corresponde a hace 4 millones de años, y así sucesivamente.

27. Calcule la media de R_N y L_N, $N = 5$, para estimar el número total de familias que se extinguieron en los periodos $100 \le t \le 150$ y $350 \le t \le 400$.

28. SAC Estime el número total de familias que se han extinguido desde $t = 0$ hasta el periodo actual, mediante M_N, $N = 544$.

Problemas avanzados

29. Pruebe que una partícula que se encuentre en el origen en $t = 1$ y que se mueva sobre el eje x a velocidad $v(t) = t^{-2}$, nunca pasará del punto $x = 2$.

30. Pruebe que una partícula que se encuentre en el origen en $t = 1$ y que se mueva sobre el eje x a velocidad $v(t) = t^{-1/2}$ se encontrará arbitrariamente lejos del origen, tras un lapso de tiempo suficiente.

5.6 Método de sustitución

El término "integración" se utiliza de dos maneras. Se refiere a:

- *El procedimiento de hallar el área con signo (calcular la integral definida).*
- *El procedimiento de hallar una primitiva (obtener una integral indefinida).*

En general, la integración (antiderivación) es más difícil que la derivación. No hay métodos infalibles y muchas primitivas no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales. Sin embargo, sí que existen algunas técnicas generales importantes. Una de estas técnicas es el **método de sustitución**, que utiliza la regla de la cadena "a la inversa".

Consideremos la integral $\int 2x\cos(x^2)\,dx$. Se puede resolver recordando la siguiente aplicación de la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^2) = 2x\cos(x^2)$$

Observemos que $\operatorname{sen}(x^2)$ es una primitiva de $2x\cos(x^2)$ y, por tanto:

$$\int \underbrace{2x}_{\text{Derivada de la función interior}} \cos\underbrace{(x^2)}_{\text{Función interior}}\,dx = \operatorname{sen}(x^2) + C$$

De forma similar, según la regla de la cadena:

$$\int \underbrace{(1 + 3x^2)}_{\text{Derivada de la función interior}} \cos\underbrace{(x + x^3)}_{\text{Función interior}}\,dx = \operatorname{sen}(x + x^3) + C$$

RECORDATORIO Una "función compuesta" es una función de la forma $f(g(x))$. Se suele denominar a $g(x)$ la función interior y a $f(u)$ la función exterior.

En ambos casos, el integrando es el producto de una función compuesta y de la derivada de la función en el interior. La regla de la cadena no ayuda si no se dispone de la derivada de la función en el interior. Por ejemplo, no se puede utilizar la regla de la cadena para calcular $\int \cos(x + x^3)\,dx$ porque el factor $(1 + 3x^2)$ no forma parte del integrando.

En general, si $F'(u) = f(u)$, por la regla de la cadena, tendremos:

$$\frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$$

lo que se traduce en el siguiente resultado de integración.

TEOREMA 1 El método de sustitución Si $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\boxed{\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + C}$$

Sustitución mediante diferenciales

Antes de pasar a los ejemplos, se tratará cómo llevar a cabo la sustitución mediante diferenciales. Los diferenciales son símbolos, tales como du o dx, que se encuentran en la notación de Leibniz du/dx y $\int f(x)\,dx$. Para los cálculos que siguen, se manipularán como si estuvieran relacionados por una ecuación en la que dx se "cancela":

$$du = \frac{du}{dx}\,dx$$

Equivalentemente, du y dx están relacionados por:

$$\boxed{du = u'(x)\,dx} \qquad \boxed{1}$$

Por ejemplo,

$$\begin{array}{lll} \text{si } u = x^2 & \text{entonces} & du = 2x\,dx \\ \text{si } u = \cos(x^3) & \text{entonces} & du = -3x^2 \operatorname{sen}(x^3)\,dx \end{array}$$

Cuando el integrando es de la forma $f(u(x))\,u'(x)$, se puede utilizar la ec. (1) para reescribir toda la integral (incluyendo el término dx) en términos de u y de su diferencial du:

El cálculo simbólico de sustitución mediante diferenciales fue inventado por Leibniz y es considerado uno de sus mayores logros. Reduce el complicado proceso de transformar integrales a un práctico conjunto de reglas.

$$\boxed{\int \underbrace{f(u(x))}_{f(u)}\ \underbrace{u'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du}$$

Esta ecuación se denomina **fórmula del cambio de variables**. Transforma una integral en la variable x en una integral (que se espera sea más simple) en la nueva variable u.

EJEMPLO 1 Resuelva $\int 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$.

Solución El integrando contiene la función compuesta $\operatorname{sen}(x^3)$, por tanto, asignamos $u = x^3$. El diferencial $du = 3x^2\,dx$ también forma parte del integrando, de manera que se puede llevar a cabo la sustitución:

En la sustitución, la clave está en elegir la función interior apropiada u.

$$\int 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)\,dx = \int \underbrace{\operatorname{sen}(x^3)}_{\operatorname{sen} u}\ \underbrace{3x^2\,dx}_{du} = \int \operatorname{sen} u\,du$$

Ahora, se resuelve la integral en la variable u y se reemplaza u por x^3 en el resultado:

$$\int 3x^2 \operatorname{sen}(x^3)\,dx = \int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C = -\cos(x^3) + C$$

Se puede comprobar la respuesta derivando:

$$\frac{d}{dx}(-\cos(x^3)) = \operatorname{sen}(x^3)\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2\operatorname{sen}(x^3)$$

■

■ **EJEMPLO 2 Multiplicación de *du* por una constante** Resuelva $\int x(x^2+9)^5\,dx$.

Solución Introducimos $u = x^2 + 9$, ya que la composición $u^5 = (x^2+9)^5$ forma parte del integrando. El diferencial $du = 2x\,dx$ no aparece tal cual, pero se puede multiplicar por $\frac{1}{2}$ para obtener:

$$\frac{1}{2}du = x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}u^5\,du = x(x^2+9)^5\,dx$$

Ahora se puede aplicar sustitución:

$$\int x(x^2+9)^5\,dx = \int \overbrace{(x^2+9)^5}^{u^5}\,\overbrace{x\,dx}^{\frac{1}{2}du} = \frac{1}{2}\int u^5\,du = \frac{1}{12}u^6 + C$$

Finalmente, se expresa el resultado como función de x, sustituyendo $u = x^2 + 9$:

$$\int x(x^2+9)^5\,dx = \frac{1}{12}u^6 + C = \frac{1}{12}(x^2+9)^6 + C$$

■

■ **EJEMPLO 3** Evalúe $\int \frac{(x^2+2x)\,dx}{(x^3+3x^2+12)^6}$.

Método de sustitución:

(1) Escoger u y calcular du.

(2) Reescribir la integral en función de u y de du y evaluar.

(3) Expresar el resultado final en función de x.

Solución La aparición de $(x^3+3x^2+12)^{-6}$ en el integrando parece sugerir que se intente la sustitución $u = x^3 + 3x^2 + 12$. Con esta elección:

$$du = (3x^2+6x)\,dx = 3(x^2+2x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}du = (x^2+2x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^2+2x)\,dx}{(x^3+3x^2+12)^6} &= \int \overbrace{(x^3+3x^2+12)^{-6}}^{u^{-6}}\,\overbrace{(x^2+2x)\,dx}^{\frac{1}{3}du} \\ &= \frac{1}{3}\int u^{-6}\,du = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{u^{-5}}{-5}\right) + C \\ &= -\frac{1}{15}(x^3+3x^2+12)^{-5} + C\end{aligned}$$

■

UN APUNTE CONCEPTUAL Un método de integración que funciona para una función dada puede fallar si cambiamos la función, aunque sea ligeramente. Si en el ejemplo previo se reemplaza 2 por 2,1 y se considera ahora $\int \frac{(x^2+2{,}1x)\,dx}{(x^3+3x^2+12)^6}$, el método de sustitución no funciona. La razón es que $(x^2+2{,}1x)\,dx$ *no* es un múltiplo de $du = (3x^2+6x)\,dx$.

■ **EJEMPLO 4** Resuelva $\int \operatorname{sen}(7\theta+5)\,d\theta$.

Solución Sea $u = 7\theta + 5$. Entonces, $du = 7\,d\theta$ y $\frac{1}{7}du = d\theta$. Se obtiene:

$$\int \operatorname{sen}(7\theta+5)\,d\theta = \frac{1}{7}\int \operatorname{sen} u\,du = -\frac{1}{7}\cos u + C = -\frac{1}{7}\cos(7\theta+5) + C$$

■

■ **EJEMPLO 5** Resuelva $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(t^{1/3})\,dt}{t^{2/3}}$.

Solución Tiene sentido probar con $u = t^{1/3}$ pues $du = \frac{1}{3}t^{-2/3}dt$ y, por tanto, $3\,du$ formará parte del integrando. En otras palabras,

$$u = t^{1/3}, \qquad \frac{dt}{t^{2/3}} = 3\,du$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}(t^{1/3})\,dt}{t^{2/3}} &= \int \operatorname{sen}(t^{1/3})\frac{dt}{t^{2/3}}\\ &= \int \operatorname{sen} u\,(3\,du)\\ &= -3\cos u + C = -3\cos(t^{1/3}) + C\end{aligned}$$

■

■ **EJEMPLO 6** **Un paso extra necesario** Resuelva $\displaystyle\int x\sqrt{5x+1}\,dx$.

Solución Como $\sqrt{5x+1}$ forma parte del integrando, se podría probar con $u = 5x+1$. En tal caso:

$$du = 5dx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5x+1}\,dx = \frac{1}{5}u^{1/2}\,du$$

Sin embargo, el integrando no es $\sqrt{5x+1}$ sino $x\sqrt{5x+1}$. Para poder tener en cuenta el factor extra x, se asigna $u = 5x+1$ obteniendo $x = \frac{1}{5}(u-1)$. Entonces:

$$x\sqrt{5x+1}\,dx = \left(\frac{1}{5}(u-1)\right)\frac{1}{5}u^{1/2}\,du = \frac{1}{25}(u-1)\,u^{1/2}\,du$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{5x+1}\,dx &= \frac{1}{25}\int (u-1)\,u^{1/2}\,du = \frac{1}{25}\int (u^{3/2} - u^{1/2})\,du\\ &= \frac{1}{25}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2}\right) + C\\ &= \frac{2}{125}(5x+1)^{5/2} - \frac{2}{75}(5x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

■

El método de sustitución no siempre funciona, incluso cuando la integral pueda parecer relativamente simple. Por ejemplo, $\int \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ no se puede resolver de forma explícita por sustitución, o por cualquier otro método. Con la práctica, se aprende a reconocer cuándo el método de sustitución tiene posibilidades de éxito.

Fórmula del cambio de variables para integrales definidas

La fórmula del cambio de variables se puede aplicar a integrales definidas pero teniendo presente que los límites de integración cambian, tal y como se indica en el siguiente teorema.

Los nuevos límites de integración respecto a la variable u son $u(a)$ y $u(b)$. Se puede pensar de esta manera: cuando x varía desde a hasta b, la variable $u = u(x)$ varía desde $u(a)$ hasta $u(b)$.

Fórmula del cambio de variables para integrales definidas

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du} \qquad \boxed{2}$$

Cambio de variables para integrales definidas:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

Demostración Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $F(u(x))$ es una primitiva de $f(u(x))u'(x)$. Según el TFC (1ª parte), ambas integrales son iguales:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(b)) - F(u(a))$$

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du = F(u(b)) - F(u(a))$$

■

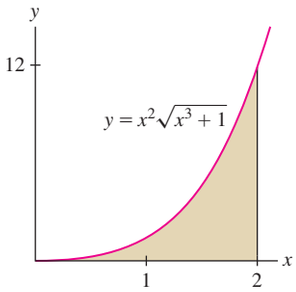


FIGURA 1 Región representada por $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

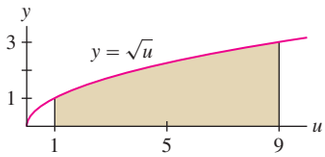


FIGURA 2 Región representada por $\int_1^9 \sqrt{u}\,du$.

■ **EJEMPLO 7** Resuelva $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Solución Consideremos la sustitución $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2\,dx$:

$$x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{u}\,du$$

Según la ec. (2), los nuevos límites de integración son:

$$u(0) = 0^3 + 1 = 1 \qquad \text{y} \qquad u(2) = 2^3 + 1 = 9$$

Por tanto:

$$\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int_1^9 \sqrt{u}\,du = \frac{2}{9}u^{3/2}\Big|_1^9 = \frac{52}{9}$$

Esta sustitución prueba que el área en la figura 1 es igual a un tercio del área en la figura 2 (aunque cabe mencionar que ambas figuras se encuentran representadas en diferentes escalas). ■

En el ejemplo anterior, se puede evitar el cambio en los límites de integración evaluando la integral en términos de x.

$$\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{9}u^{3/2} = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}$$

Lo que lleva al mismo resultado: $\int_0^2 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{52}{9}$.

■ **EJEMPLO 8** Resuelva $\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta\sec^2\theta\,d\theta$.

Solución La sustitución $u = \tan\theta$ es apropiada porque $du = \sec^2\theta\,d\theta$ y, en consecuencia, $u^3\,du = \tan^3\theta\sec^2\theta\,d\theta$. Los nuevos límites de integración son:

$$u(0) = \tan 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad u\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Por tanto:

$$\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta\sec^2\theta\,d\theta = \int_0^1 u^3\,du = \frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$ ■

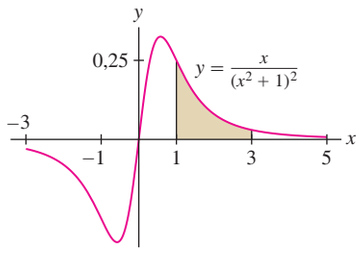


FIGURA 3 Área por debajo de $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ en $[1, 3]$.

■ **EJEMPLO 9** Calcule el área por debajo de $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ en $[1, 3]$.

Solución El área (ver la figura 3) es igual a la integral $\int_1^3 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$. Se considerará la sustitución:

$$u = x^2 + 1, \qquad du = 2x\,dx, \qquad \frac{1}{2}\frac{du}{u^2} = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$

Los nuevos límites de integración son $u(1) = 1^2 + 1 = 2$ y $u(3) = 3^2 + 1 = 10$; por consiguiente:

$$\int_1^3 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^{10}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{u}\Big|_2^{10} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$ ■

5.6 RESUMEN

- Probar con el método de sustitución cuando el integrando sea de la forma $f(u(x))\,u'(x)$. Si F es una primitiva de f, entonces:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = F(u(x)) + C$$

- La diferencial de $u(x)$ está relacionada con dx mediante $du = u'(x)\,dx$.
- El método de sustitución se expresa por medio de la fórmula del cambio de variables:

$$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

- Fórmula del cambio de variables para integrales definidas:

$$\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du$$

5.6 PROBLEMAS

Ejercicios preliminares

1. ¿Cuál de las siguientes integrales es una candidata a ser resuelta por el método de sustitución?

(a) $\int 5x^4 \operatorname{sen}(x^5)\,dx$ **(b)** $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$

(c) $\int x^5 \operatorname{sen} x\,dx$

2. Halle una elección adecuada de u para resolver las siguientes integrales por sustitución:

(a) $\int x(x^2+9)^4\,dx$ **(b)** $\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$

(c) $\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$

3. Con una sustitución apropiada, ¿cuál de las siguientes integrales es igual a $\int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx$?

(a) $\frac{1}{3}\int_0^2 u\,du$ **(b)** $\int_0^9 u\,du$ **(c)** $\frac{1}{3}\int_1^9 u\,du$

Problemas

En los problemas 1-6, calcular du.

1. $u = x^3 - x^2$ **2.** $u = 2x^4 + 8x^{-1}$

3. $u = \cos(x^2)$ **4.** $u = \tan x$

5. $u = \operatorname{sen}^4 \theta$ **6.** $u = \dfrac{t}{t+1}$

En los problemas 7-20, escriba la integral en términos de u y de du. A continuación, resuelva la integral.

7. $\int (x-7)^3\,dx, \quad u = x - 7$

8. $\int (x+25)^{-2}\,dx, \quad u = x + 25$

9. $\int t\sqrt{t^2+1}\,dt, \quad u = t^2 + 1$

10. $\int (x^3+1)\cos(x^4+4x)\,dx, \quad u = x^4 + 4x$

11. $\int \dfrac{t^3}{(4-2t^4)^{11}}\,dt, \quad u = 4 - 2t^4$

12. $\int \sqrt{4x-1}\,dx, \quad u = 4x - 1$

13. $\int x(x+1)^9\,dx, \quad u = x + 1$

14. $\int x\sqrt{4x-1}\,dx, \quad u = 4x - 1$

15. $\int x^2\sqrt{x+1}\,dx, \quad u = x + 1$

16. $\int \operatorname{sen}(4\theta - 7)\,d\theta, \quad u = 4\theta - 7$

17. $\int \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\,d\theta, \quad u = \operatorname{sen}\theta$

18. $\int \sec^2 x \tan x\,dx, \quad u = \tan x$

19. $\int x \sec^2(x^2)\,dx, \quad u = x^2$

20. $\int \sec^2(\cos x)\operatorname{sen} x\,dx, \quad u = \cos x$

En los problemas 21-24, exprese la integral como a sen($u(x)$) + C, *para una elección adecuada de* $u(x)$ *y de la constante* a.

21. $\int x^3 \cos(x^4)\,dx$ **22.** $\int x^2 \cos(x^3+1)\,dx$

23. $\int x^{1/2} \cos(x^{3/2})\,dx$ **24.** $\int \cos x \cos(\operatorname{sen} x)\,dx$

En los problemas 25-59, resuelva la integral indefinida.

25. $\int (4x+5)^9\,dx$ **26.** $\int \frac{dx}{(x-9)^5}$

27. $\int \frac{dt}{\sqrt{t+12}}$ **28.** $\int (9t+2)^{2/3}\,dt$

29. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x)^3}\,dx$

30. $\int (x+1)(x^2+2x)^{3/4}\,dx$

31. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ **32.** $\int \frac{2x^2+x}{(4x^3+3x^2)^2}\,dx$

33. $\int (3x^2+1)(x^3+x)^2\,dx$ **34.** $\int \frac{5x^4+2x}{(x^5+x^2)^3}\,dx$

35. $\int (3x+8)^{11}\,dx$ **36.** $\int x(3x+8)^{11}\,dx$

37. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ **38.** $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$

39. $\int \frac{dx}{(x+5)^3}$ **40.** $\int \frac{x\,dx}{(x+5)^{3/2}}$

41. $\int z^2(z^3+1)^{12}\,dz$

42. $\int (z^5+4z^2)(z^3+1)^{12}\,dz$

43. $\int (x+2)(x+1)^{1/4}\,dx$ **44.** $\int x^3(x^2-1)^{3/2}\,dx$

45. $\int \operatorname{sen}(8-3\theta)\,d\theta$ **46.** $\int \theta \operatorname{sen}(\theta^2)\,d\theta$

47. $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$ **48.** $\int x^2 \operatorname{sen}(x^3+1)\,dx$

49. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x+1}}\,dx$ **50.** $\int \operatorname{sen}^8\theta \cos\theta\,d\theta$

51. $\int \sec^2 x\,(12\tan^3 x - 6\tan^2 x)\,dx$

52. $\int x^{-1/5}\sec(x^{4/5})\tan(x^{4/5})\,dx$

53. $\int \sec^2(4x+9)\,dx$ **54.** $\int \sec^2 x \tan^4 x\,dx$

55. $\int \frac{\sec^2(\sqrt{x})\,dx}{\sqrt{x}}$ **56.** $\int \frac{\cos 2x}{(1+\operatorname{sen} 2x)^2}\,dx$

57. $\int \operatorname{sen} 4x\sqrt{\cos 4x+1}\,dx$ **58.** $\int \cos x\,(3\operatorname{sen} x - 1)\,dx$

59. $\int \sec\theta\tan\theta(\sec\theta - 1)\,d\theta$ **60.** $\int \cos t \cos(\operatorname{sen} t)\,dt$

61. Resuelva $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$ aplicando el cambio $u = 1+\sqrt{x}$. *Indicación:* Probar que $dx = 2(u-1)du$.

62. ¿Pueden tener razón las dos? Para resolver $\int \tan x \sec^2 x\,dx$, Hannah considera la sustitución $u = \tan x$ y Akiva usa $u = \sec x$. Pruebe que cada una obtiene una respuesta diferente y explicar la aparente contradicción.

63. Resuelva $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$, por sustitución, de dos maneras: primero considerando $u = \operatorname{sen} x$ y después $u = \cos x$. Pruebe que ambas respuestas son, en realidad, correctas.

64. Algunas elecciones son mejores que otras Resuelva:

$$\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx$$

de dos maneras, tal y como se explica a continuación. En primer lugar, utilice $u = \operatorname{sen} x$ para probar que:

$$\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\,dx = \int u\sqrt{1-u^2}\,du$$

y resuelva la integral a la derecha de la igualdad mediante una nueva sustitución. En una segunda fase, muestre que $u = \cos x$ es una elección mejor para la sustitución que la inicial.

65. ¿Cuáles son los nuevos límites de integración si se aplica la sustitución $u = 3x+\pi$ a la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(3x+\pi)\,dx$?

66. ¿Si se aplica la sustitución $u = 4x-9$ a la integral $\int_2^8 (4x-9)^{20}\,dx$, ¿cuál es el resultado?

(a) $\int_2^8 u^{20}\,du$ **(b)** $\frac{1}{4}\int_2^8 u^{20}\,du$

(c) $4\int_{-1}^{23} u^{20}\,du$ **(d)** $\frac{1}{4}\int_{-1}^{23} u^{20}\,du$

En los problemas 67-78, utilice la fórmula del cambio de variables para resolver la integral definida.

67. $\int_1^3 (x+2)^3\,dx$ **68.** $\int_1^6 \sqrt{x+3}\,dx$

69. $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ **70.** $\int_{-1}^2 \sqrt{5x+6}\,dx$

71. $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\,dx$ **72.** $\int_1^2 \frac{4x+12}{(x^2+6x+1)^2}\,dx$

73. $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\,dx$ **74.** $\int_{10}^{17} (x-9)^{-2/3}\,dx$

75. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x+1}}$ **76.** $\int_0^{\pi/6} \sec^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)dx$

77. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$

78. $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cot^2 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx$

79. Resuelva $\displaystyle\int_0^2 r\sqrt{5 - \sqrt{4 - r^2}}\, dr$.

80. Halle dos números a y b tales que:

$$\int_a^b (u^2 + 1)\, du = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^4 \theta\, d\theta$$

y resuelva la integral. *Indicación:* Utilice la identidad $\sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1$.

En los problemas 81-82, utilice el método de sustitución para expresar el resultado de la integral en términos de $f(x)$.

81. $\displaystyle\int f(x)^3 f'(x)\, dx$

82. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)^2}\, dx$

83. Pruebe que $\displaystyle\int_0^{\pi/6} f(\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \int_0^{1/2} f(u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$.

84. Resuelva $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \cos x\, dx$ para $n \geq 0$.

Problemas avanzados

85. Resuelva $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \tan^{6000}\theta}$. *Indicación:* Aplique sustitución para demostrar que I es igual $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \cot^{6000}\theta}$ y, después, compruebe que $I + J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} d\theta$.

86. Demuestre, utilizando la sustitución $u = 1 + x^{1/n}$, que:

$$\int \sqrt{1 + x^{1/n}}\, dx = n \int u^{1/2}(u-1)^{n-1}\, du$$

Resuelva la integral para $n = 2$ y $n = 3$.

87. Utilice el método de sustitución para demostrar que si f es una función impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.

88. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{b/a} \frac{1}{x}\, dx$ para todo $a, b > 0$. A continuación, pruebe que todas las regiones por debajo de la hipérbola a lo largo de los intervalos:

$$[1, 2], \quad [2, 4], \quad [4, 8], \quad \ldots$$

tienen la misma área (figura 4).

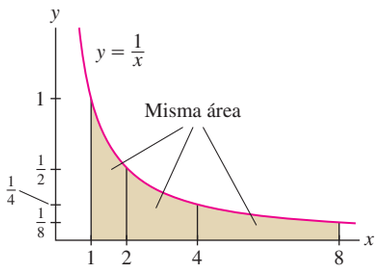


FIGURA 4 El área por debajo de $y = \frac{1}{x}$ a lo largo de $[2^n, 2^{n+1}]$ es la misma para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$.

89. Pruebe que las dos regiones de la figura 5 tienen la misma área. A continuación, utilice la identidad $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$ para calcular la segunda área.

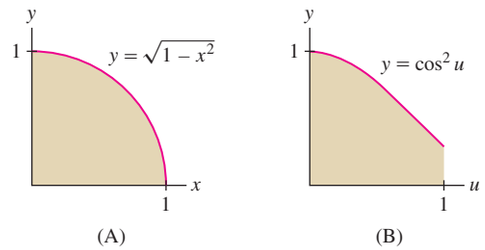


FIGURA 5

90. Área de una elipse Demuestre que el área A de una elipse (figura 6) de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es igual a πab. *Indicación:* Utilice un cambio de variables para demostrar que A es igual a ab multiplicado por el área del círculo unitario.

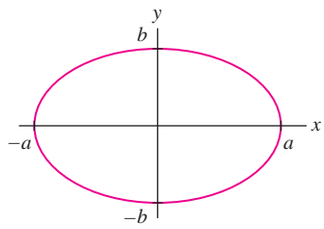


FIGURA 6 Gráfica de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

REPASO DE LOS PROBLEMAS DEL CAPÍTULO

En los problemas 1-4, $f(x)$ corresponde a la función representada en la figura 1.

1. Estime L_4 y M_4 en $[0, 4]$.

2. Estime R_4, L_4 y M_4 en $[1, 3]$.

3. Halle un intervalo $[a, b]$ para el que R_4 sea mayor que $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$. Repita el problema anterior con L_4 en lugar de R_4.

4. Justifique que $\dfrac{3}{2} \leq \displaystyle\int_1^2 f(x)\, dx \leq \dfrac{9}{4}$.

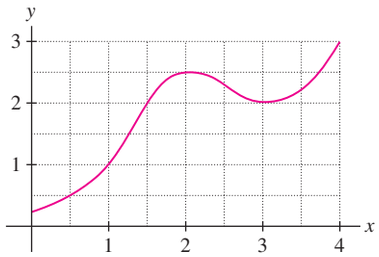


FIGURA 1

En los problemas 5-8, sea $f(x) = x^2 + 3x$.

5. Calcule R_6, M_6 y L_6 para $f(x)$ en el intervalo $[2, 5]$. Dibuje la gráfica de $f(x)$ y los correspondientes rectángulos de cada aproximación.

6. Resuelva $A(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$ aplicando la 1ª parte del TFC.

7. Consideremos $f(x)$ en $[2, 5]$. Halle una fórmula para R_N que permita calcular, pasando al límite, el valor de $\int_2^5 f(x)\,dx$.

8. Consideremos $f(x)$ en $[0, 2]$. Halle una fórmula para L_N que permita calcular, pasando al límite, el valor de $\int_2^5 f(x)\,dx$.

9. Calcule R_5, M_5 y L_5 para $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ en el intervalo $[0, 1]$.

10. Sea R_N la aproximación de orden N basada en el extremo superior para la función $f(x) = x^3$ en $[0, 4]$ (figura 2).

(a) Pruebe que $R_N = \dfrac{64(N+1)^2}{N^2}$.

(b) Pruebe que la porción de área de los rectángulos, basados en los extremos superiores, que queda por encima de la gráfica es igual a:

$$\frac{64(2N+1)}{N^2}$$

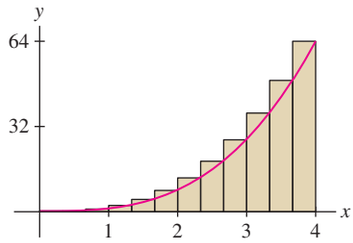


FIGURA 2 Aproximación R_N para $f(x) = x^3$ en $[0, 4]$.

11. ¿A qué aproximación del área corresponden los rectángulos sombreados de la figura 3? Calcule R_5 y L_5.

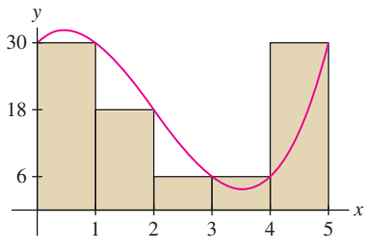


FIGURA 3

12. Calcule dos sumas de Riemann para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[2, 5]$, pero seleccione particiones que tengan, como mínimo, cinco subintervalos con diferentes longitudes y puntos intermedios que no sean ni los extremos ni los puntos medios de los subintervalos.

En los problemas 13-16, exprese el límite como una integral (o un múltiplo de una integral) y resuelva.

13. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{\pi}{6N} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi j}{6N}\right)$

14. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{3}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(10 + \frac{3k}{N}\right)$

15. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{5}{N} \sum_{j=1}^{N} \sqrt{4 + 5j/N}$

16. $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + N^k}{N^{k+1}} \quad (k > 0)$

En los problemas 17-20, aplique la sustitución indicada para resolver la integral.

17. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dt}{(4t+12)^2}, \qquad u = 4t + 12$

18. $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^3+3x)^4}, \qquad u = x^3 + 3x$

19. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} x \cos^4 x\,dx, \qquad u = \cos x$

20. $\displaystyle\int \sec^2(2\theta)\tan(2\theta)\,d\theta, \quad u = \tan(2\theta)$

En los problemas 21-48, resuelva la integral.

21. $\displaystyle\int (20x^4 - 9x^3 - 2x)\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^2 (12x^3 - 3x^2)\,dx$

23. $\displaystyle\int (2x^2 - 3x)^2\,dx$

24. $\displaystyle\int_0^1 (x^{7/3} - 2x^{1/4})\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x^5 + 3x^4}{x^2}\,dx$

26. $\displaystyle\int_1^3 r^{-4}\,dr$

27. $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x^2 - 4|\,dx$

28. $\displaystyle\int_{-2}^{4} |(x-1)(x-3)|\,dx$

29. $\displaystyle\int_1^3 [t]\,dt$

30. $\displaystyle\int_0^2 (t - [t])^2\,dt$

31. $\displaystyle\int (10t - 7)^{14}\,dt$

32. $\displaystyle\int_2^3 \sqrt{7y - 5}\,dy$

33. $\displaystyle\int \frac{(2x^3 + 3x)\,dx}{(3x^4 + 9x^2)^5}$

34. $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{x\,dx}{(x^2+5)^2}$

35. $\displaystyle\int_0^5 15x\sqrt{x+4}\,dx$

36. $\displaystyle\int t^2\sqrt{t+8}\,dt$

37. $\displaystyle\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{3}(t+2)\right)dt$

38. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{5\theta-\pi}{6}\right)d\theta$

39. $\displaystyle\int t^2\sec^2(9t^3+1)\,dt$

40. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(3\theta)\cos(3\theta)\,d\theta$

41. $\displaystyle\int \csc^2(9-2\theta)\,d\theta$

42. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\theta\sqrt{4-\cos\theta}\,d\theta$

43. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^{2/3}\theta}\,d\theta$

44. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t\,dt}{(\tan t-1)^2}$

45. $\displaystyle\int y\sqrt{2y+3}\,dy$

46. $\displaystyle\int_1^8 t^2\sqrt{t+8}\,dt$

47. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec^2(\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

48. $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{12x\,dx}{(x^2+2)^3}$

49. Exprese la siguiente suma como una única integral:

$$\int_0^8 f(x)\,dx+\int_{-2}^0 f(x)\,dx+\int_8^6 f(x)\,dx$$

50. Sea $A(x)=\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx$, donde $f(x)$ es la función representada en la figura 4. Identifique el máximo y mínimo relativos de $A(x)$ y sus puntos de inflexión. Determine también los intervalos en los que $A(x)$ es estrictamente creciente, estrictamente decreciente, convexa y cóncava. ¿En qué punto presenta $A(x)$ un máximo absoluto?

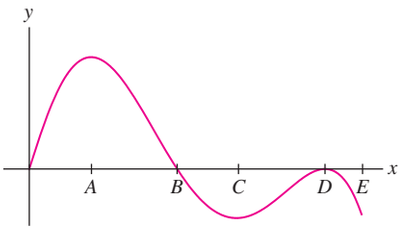


FIGURA 4

51. Halle los puntos de inflexión de $A(x)=\displaystyle\int_3^x \frac{t\,dt}{t^2+1}$ sin evaluar $A(x)$ de forma explícita.

52. Una partícula, que empieza su movimiento en el origen para $t=0$, se desplaza a velocidad $v(t)$, según se muestra en la figura 5.

(a) ¿Cuántas veces vuelve a pasar la partícula por el origen, durante los primeros 12 segundos?

(b) ¿Cuál es la distancia máxima entre la posición de la partícula y el origen?

(c) ¿Cuál es la distancia máxima entre la posición de la partícula a la izquierda del origen y éste?

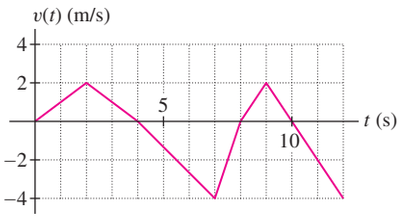


FIGURA 5

53. Un día cualquiera, el consumo de agua en una ciudad se realiza a razón de $r(t)=100+72t-3t^2$ (en miles de galones por hora), siendo t el número de horas desde la medianoche. ¿Cuál es el consumo diario de agua? ¿Cuánta agua se consume entre las 6 de la tarde y la medianoche?

54. La curva de aprendizaje para una cierta fábrica de bicicletas es $L(x)=12x^{-1/5}$ (en horas por bicicleta), lo que significa que un operario tarda $L(n)$ horas para ensamblar la n-ésima bicicleta. Si un operario ha montado 24 bicicletas, ¿cuánto ha tardado en el segundo grupo de 12?

55. La función de los ingenieros de costos de la NASA es planear y evaluar el coste P de los grandes proyectos espaciales. Se considera que el coste C de realizar un lanzamiento varía en función de P a razón de $dC/dP\approx 21P^{-0{,}65}$, donde C está expresado en miles de dólares y P en millones de dólares. ¿Cuál es el coste de un lanzamiento para un proyecto de coste $P=35$ millones de dólares?

56. Un astrónomo considera que, en cierta constelación, el número de estrellas por grado al cuadrado de cielo se expresa como función de la magnitud, m, de éstas, según $A(m)=2{,}4\times10^{-6}m^{7{,}4}$ (estrellas más débiles tienen magnitudes superiores). Determine el número total de estrellas de magnitud entre 6 y 15 en una región de un grado al cuadrado de cielo.

57. Resuelva $\displaystyle\int_{-8}^{8} \frac{x^{15}\,dx}{3+\cos^2 x}$, utilizando las propiedades de las funciones impares.

58. Evalúe $\int_0^1 f(x)\,dx$ suponiendo que $f(x)$ es una función continua y par, tal que:

$$\int_1^2 f(x)\,dx=5,\qquad \int_{-2}^1 f(x)\,dx=8$$

59. GU Represente gráficamente la función $f(x)=\operatorname{sen}mx\operatorname{sen}nx$ en $[0,\pi]$ para los pares $(m,n)=(2,4),(3,5)$ y, en cada caso, conjeture el valor de $I=\int_0^{\pi} f(x)\,dx$. Pruebe con algunos valores más (incluyendo dos casos en los que $m=n$) y formule una conjetura sobre cuándo I es igual a cero.

60. Demuestre que:

$$\int x\,f(x)\,dx=xF(x)-G(x)$$

donde $F'(x)=f(x)$ y $G'(x)=F(x)$. Utilice este resultado para resolver $\displaystyle\int x\cos x\,dx$.

61. Pruebe que:

$$2\le\int_1^2 2^x\,dx\le 4\qquad\text{y}\qquad \frac{1}{9}\le\int_1^2 3^{-x}\,dx\le\frac{1}{3}$$

62. GU Represente gráficamente la función $f(x)=x^{-2}\operatorname{sen}x$ y pruebe que $0{,}2\le\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx\le 0{,}9$.

63. Halle una cota superior y una inferior de $\int_0^1 f(x)\,dx$, para la función $f(x)$ de la figura 6.

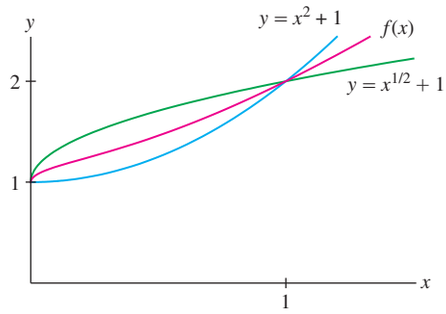


FIGURA 6

En los problemas 64-69, halle la derivada.

64. $A'(x)$, donde $A(x) = \int_3^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt$

65. $A'(\pi)$, donde $A(x) = \int_2^x \frac{\cos t}{1+t}\,dt$

66. $\frac{d}{dy}\int_{-2}^y 3^x\,dx$

67. $G'(x)$, donde $G(x) = \int_{-2}^{\operatorname{sen} x} t^3\,dt$

68. $G'(2)$, donde $G(x) = \int_0^{x^3} \sqrt{t+1}\,dt$

69. $H'(1)$, donde $H(x) = \int_{4x^2}^9 \frac{1}{t}\,dt$

70. Explique con la ayuda de un gráfico: si $f(x)$ es estrictamente creciente y convexa en $[a, b]$, entonces L_N es más preciso que R_N. ¿Qué aproximación es más precisa si $f(x)$ es estrictamente creciente pero cóncava?

71. Explique, con la ayuda de un gráfico: si $f(x)$ es una función lineal en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(R_N + L_N)$ para todo N.

72. Sea $f(x)$ una función continua, positiva y estrictamente creciente en $[a, b]$, donde $0 \le a < b$, tal y como se muestra en la figura 7. Pruebe que el área de la región sombreada es igual a:

$$I = bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)\,dx \qquad \boxed{1}$$

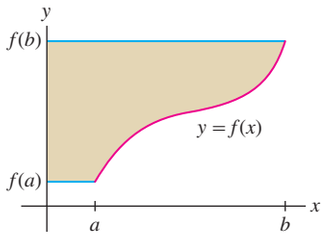


FIGURA 7

73. Si $a < b \le 0$, ¿cómo se podría interpretar I en la ec. (1)? Ilustre la explicación con un gráfico.